Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf
Coordinador: Daniel Lillo
Auxiliares: Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 4
22 Septiembre 2010

Problema 1

Sea P el poliedro representado por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 - 5x_2 \geq 0$$
$$x_1 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0$$

a.- Grafique el poliedro.
b.- Transforme el poliedro a forma estándar
c.- ¿Qué restricción se podría agregar para que el problema se viera "más amigable" sin cambiar la región factible?
d.- Interprete gráficamente las variables de holgura incluidas.
e.- Bajo la restricción impuesta en la parte c. ¿Qué ocurre con el origen? Describa todas las bases que forman el origen.
f.- De un ejemplo de función objetivo para que la solución quede en:

- vértice $(2, \frac{4}{3})$
- Sobre toda la restricción $x_1 + 3x_2 \leq 6$

Problema 2

Considere un poliedro en forma estándar $\{x \in R_+^n \mid Ax = b\}$, donde las filas de la matriz $A \in R^{mxn}$ son linealmente independientes.

a) Suponga que hay dos Bases distintas asociadas a la misma solución básica $\bar{x}$. Muestre esta solución es "degenerada".
b) Suponga que todas las soluciones básicas factibles son "no degeneradas". Sea $x \in P$ tal que exactamente m de sus componentes son positivas. Muestre que x es una solución básica factible. Qué ocurre si eliminamos el supuesto de "no degeneradas"?.

Problema 3

Considere el problema de minimización c^t x en el poliedro P, pruebe lo siguiente:

a) Una solución factible x es óptima ssi c^t d ≥ 0, para toda dirección factible d en x.
b) Una solución factible x es la única solución óptima ssi c^t d > 0 para toda dirección factible d ≠ 0 en x.

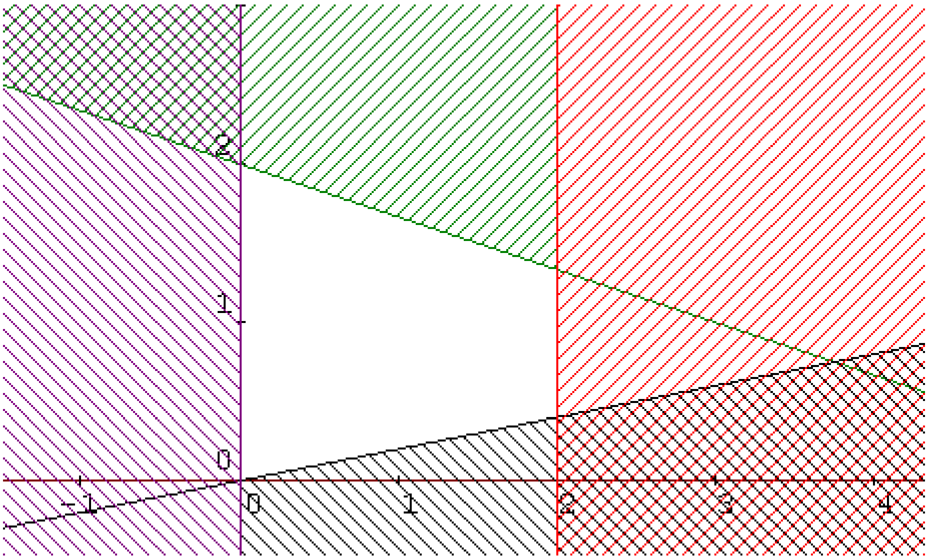
Problema 4

Consideremos el problema de $max\{cx: x \in P\}$, y asuma que $P \neq \emptyset$ entonces existe una solución óptima, o el problema es no-acotado.

Pauta Auxiliar 4

Problema 1

a)



El área en blanco representa la región factible.

b)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x^+{}_2 - 3x^-{}_2 + x_3 &&= 6\\
&x_1 - 5x^+{}_2 + 5x^-{}_2 + x_4 &&= 0\\
&x_1 + x_5 &&= 2\\
&x_1, x^+{}_2, x^-{}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

c) Se podría agregar $x_2 \geq 0$, y el poliedro quedaría de la misma forma:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + x_3 &&= 6\\
&x_1 - 5x_2 + x_4 &&= 0\\
&x_1 + x_5 &&= 2\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

d) Las variables de holgura se pueden interpretar gráficamente como un eje de coordenadas perpendicular a la restricción en la cuál está definida. Así, valdrán cero donde la restricción original es activa, serán positivas dentro de la región factible, y negativas fuera de ella.

e) El origen queda con la particularidad de que tiene una variable básica igual a cero. Si se fijan, en el origen las variables x_1, x_2 y x_4 valen cero. Luego podemos tomar como base las siguientes combinaciones de variables:

x_1, x_3, x_5

x_2, x_3, x_5

x_4, x_3, x_5

f) Una función objetivo que tenga el óptimo en el vértice (2,4/3) será una

Problema 2

a) Sean B_1, B_2 dos bases distintas asociadas a $\bar{x}$.

Supongamos que $\bar{x}$ es no degenerada. Luego por definición de solución básica factible se tiene que $\bar{x}_i = 0 \quad \forall i \in B_1$, (variables no básica), y por otro lado $\bar{x}_j = 0 \quad \forall j \in B_2$.

Para las variables básicas se tiene que $\bar{x}_i \geq 0 \quad \forall i \in B_1$ y $\bar{x}_j \geq 0 \quad \forall j \in B_2$. Luego como las bases son distintas existe $k \in B_1$, tal que $k \notin B_2$, o viceversa.

Como $k \in B_1$ entonces $\bar{x}_k \geq 0$. Por otro lado, como $k \notin B_2$, entonces $\bar{x}_k = 0$.

Como las dos bases definen a $\bar{x}$ se tiene que $\bar{x}_k = 0$, luego, como $k \in B_1$, se tiene una variable básica nula. Por lo tanto, $\bar{x}$ es una solución básica degenerada. =><=.

b) Como $x \in P$ cumple que Ax=b, Luego $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b$.

Sean $\{B(1), \dots, B(m)\}$ los índices de las componentes positivas de x.

Luego, $\sum_{j=1}^{m} A_{B(j)} x_{B(j)} = b$ es un sistema de mxm, con solución unica, lo que implica que las columnas $A_{B(j)}$ son l.i., luego x es una solución básica. (Notar que se puede concluir lo mismo, diciendo que las filas son l.i. y por ende hay m restricciones activas en x).

Si eliminamos el supuesto de "no degeneradas" el punto x no será necesariamente una solución básica factible, ya que puede ocurrir que un punto interior tenga m componentes positivas, basta considerar el punto donde se produce la degenerancia y moverse hacia el interior del poliedro aumentando las variables básicas que son nulas. Con esto se tienen m componentes positivas en un punto interior.

Como $x \in P$ cumple que $Ax = b$, luego $\sum_{i=1} A_i x_i = b$

Sean $\{B(1), \dots, B(m)\}$ los índices de las componentes positivas de x.

Luego $\sum_{j=1}^{m} A_{B(j)} x_{B(j)} = b$ es un sistema "cuadrado" con solución única, lo que implica que las columnas $A_{B(j)}$ son l.i.

Si las m columnas son l.i. entonces las m filas también lo son, por lo que se tienen m restricciones activas l.i.

Luego x es una solución básica factible.

Si eliminamos el supuesto de "no degeneradas" el punto x no será necesariamente una solución básica factible, ya que puede ocurrir que un punto interior tenga m componentes positivas, basta considerar el punto donde se produce la degenerancia y moverse hacia el interior del poliedro aumentando las variables básicas que son nulas. Con esto se tienen m componentes positivas en un punto interior.

Problema 3

a)

$\Longrightarrow$ Condición suficiente (por contradicción)

Sea x solución óptima $(c^t x \leq c^t y \quad \forall y \in P)$

Supongamos que $\exists$ d tal que $c^t d < 0$

Sea $y = x + \theta d, \qquad \theta > 0$

Como x es óptimo: $c^t x \leq c^t y$

$$c^t x \leq c^t (x + \theta d)$$

$$0 \leq \theta c^t d$$

$$0 \leq c^t d \ \rightarrow\leftarrow$$

$\Leftarrow$ Condición necesaria

Supongamos que $c^t d \geq 0 \quad \forall$ d dirección factible

Sea y tal que $d = y - x$

$$c^t d \geq 0$$

$$c^t (y - x) \geq 0$$

$$c^t y \geq c^t x$$

Luego x es óptimo

b)

$\Leftarrow$ Condición necesaria

Sea y otra solución óptima, con x≠y

Como $y \in P$, $\exists\, un\ \bar{d}$ tal que: $y = x + \theta \bar{d}$, ya que P es convexo

Tenemos que $c^t d > 0 \ \forall$ d factible, en particular para $\bar{d}$

$c^t \bar{d} > 0$

Si multiplicamos la ecuación anterior por θ y le sumamos $c^t x$

$$c^t (x + \theta \bar{d}) > c^t x$$

$$c^t y > c^t x$$

Luego x es el único óptimo.

$\Longrightarrow$ Condición suficiente (por contradicción)

Sea x el único óptimo $\quad c^t x < c^t y \quad \forall$ y $\in P/\{x\}$

Además, todo y $\in P/\{x\}$ se puede escribir como: $y = x + \theta \bar{d}$ con $\theta > 0$, ya que P es convexo

Supongamos que $\exists\ \bar{d}$ factible tal que $c^t \bar{d} \leq 0$

Al multiplicar por θ y sumar $c^t x$ en ambos lados, obtenemos:

$$c^t (x + \theta \bar{d}) \leq c^t x$$

$$c^t y \leq c^t x \quad \rightarrow\leftarrow$$