El Método Simplex

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
"Introduction to Linear Optimization"
Chap. 3
IN3701 – Modelamiento y Optimización

Nelson Devia C.

Introducción

- Se sabe que si un problema de programación lineal admite solución óptima, entonces existe una solución básica factible (sbf) que es solución óptima de él. Esto implica que:
  - Si el problema tiene solución óptima única, ésta es una solución básica factible (vértice o punto extremo del poliedro).
  - Si el problema tiene infinitas soluciones óptimas, al menos una de ellas es una solución básica factible (vértice o punto extremo del poliedro).
- El método Simplex aprovecha esto y busca la solución óptima moviéndose de una sbf a otra, a través de las aristas del poliedro factible, en una dirección que reduzca los costos.
- En este capítulo se considerará una problema en forma estándar, es decir:

$$\begin{aligned} &Min\ c'x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Condiciones de Optimalidad

- Como todo problema de programación lineal es representado por un poliedro, basta con buscar óptimos locales, ya que en un conjunto convexo todo óptimo local es un óptimo global.

- **Óptimo Local:** Un punto x es un óptimo local si ningún punto factible cercano a él lleva a una mejora en la función objetivo.

- Formalmente: x^* es un óptimo local de P ssi:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in B(x^*, \varepsilon) \cap P, c'x \geq c'x^*$$

  - Donde $B(x^*, \varepsilon)$ es una bola de radio ε centrada en x^*

Propiedades de la Forma Estándar

- Recordemos que el problema en forma estándar de la primera lámina es una representación matricial del siguiente problema:

$$Min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n$$

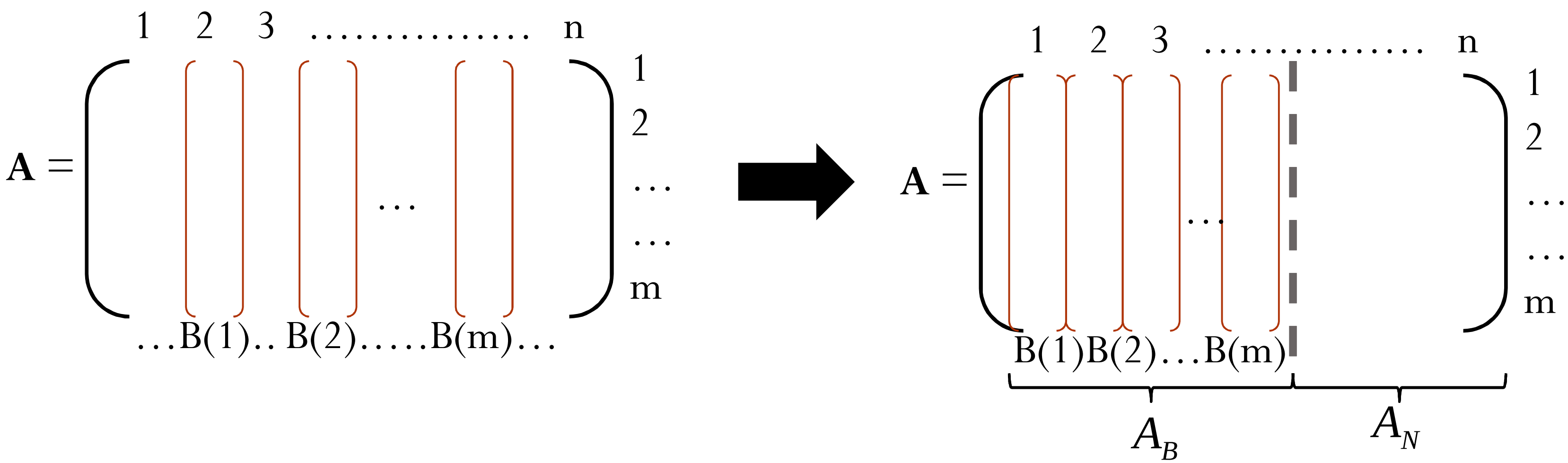
- Sean $B(1),\ldots,B(m)$ los índices de las variables básicas para una sbf del poliedro factible.
  - Recordar que en las sbf's se tiene que $x_i = 0 \ \forall i \notin B = \{B(1),\ldots,B(m)\}$

- El problema se puede escribir ahora separando las variables básicas de las no básicas…

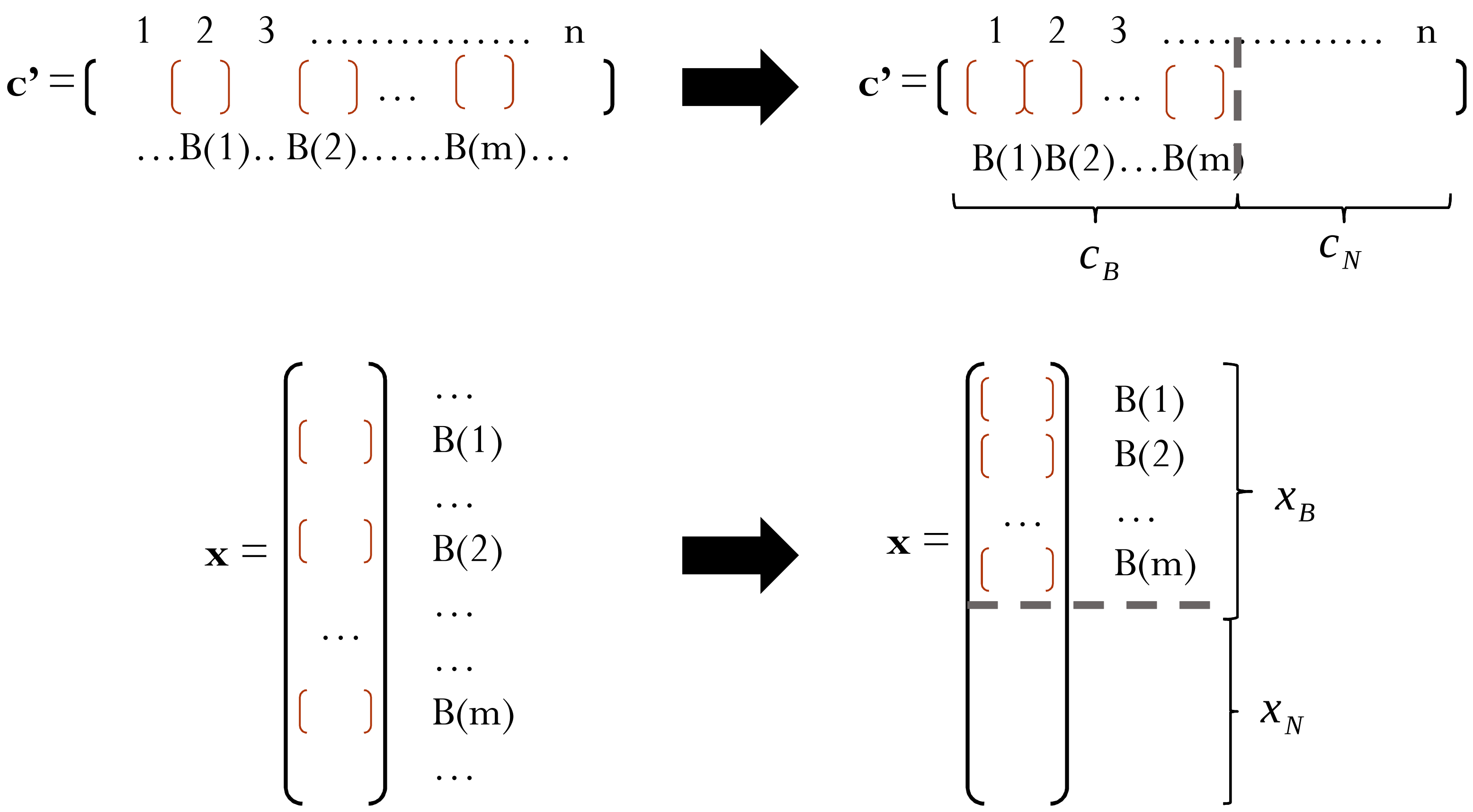
Propiedades de la Forma Estándar

$$
\begin{aligned}
&Min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
&\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = b \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n
\end{aligned}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
&Min \sum_{i=1}^{m} c_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{i \notin B} c_i x_i \\
&\sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} x_{B(i)} + \sum_{i \notin B} A_i x_i = b \\
&x_i \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

- En términos matriciales, lo que se hizo fue reordenar las columnas de la matriz A y las componentes de los vectores c y x de manera que se obtenga el mismo resultado.



Propiedades de la Forma Estándar



Propiedades de la Forma Estándar

- Ahora el problema se puede escribir así:

$$Min\ c'_B x_B + c'_N x_N \quad (1)$$
$$A_B x_B + A_N x_N = b \quad (2)$$
$$x \geq 0$$

- Sabemos que en una sbf la matriz A_B es invertible, luego de (2) se tiene: $x_B = \underbrace{A_B^{-1} b}_{\bar{b}} - \underbrace{A_B^{-1} A_N}_{\bar{A}_N} x_N \quad (3)$

  - Sean $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N \quad \Rightarrow \quad x_B = \bar{b} - \bar{A}_N x_X$

  - En las sbf's se tiene que $x_N = 0$, luego $x_B = \bar{b}$

Costos Reducidos

- Reemplazando (3) en (1):

$$c'_B \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N\right) + c'_N \, x_N$$
$$c'_B \, A_B^{-1} b + \left(c'_N - c'_B \, A_B^{-1} A_N\right) x_N$$
$$c'_B \, A_B^{-1} b + \bar{c}'_N x_N$$

- Donde llamamos **costos reducidos** a: $\bar{c}'_N = c'_N - c'_B \, A_B^{-1} A_N$
- Luego el problema de optimización queda:

$$\min \; c'_B \, A_B^{-1} b + \bar{c}'_N x_N$$
$$x \geq 0$$

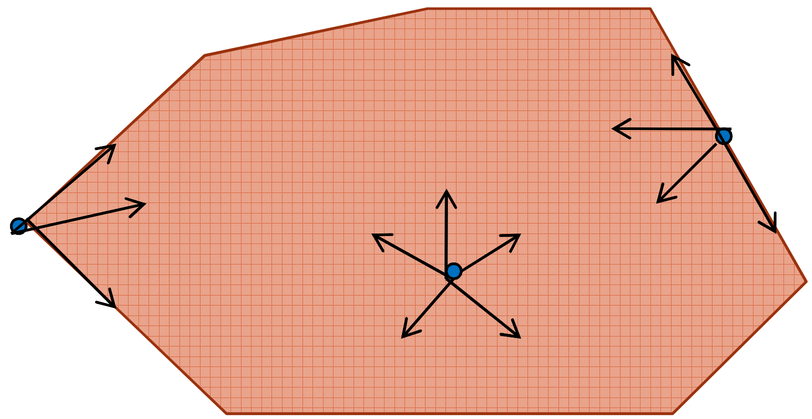
  - Notar que el primer término es una constante para el problema
  - El óptimo de este problema depende de los costos reducidos:
    - Si todos los costos reducidos son no negativos, el óptimo se alcanza para $x_N = 0$ y, por lo tanto, la base elegida es una base óptima.
    - Si existe una componente "i" negativa en los costos reducidos, significa que se obtiene un beneficio al aumentar el valor de x_i, por lo que ésta debería dejar de ser una variable no básica (entraría a la base) y, por lo tanto, la base actual no es la óptima.

Dirección Factible

- Una **dirección factible** es aquella dirección en la que es posible moverse si salir inmediatamente del poliedro.

- Formalmente, dado un poliedro P y un punto $x \in P \subseteq R^n$, un vector $d \in R^n$ es una dirección factible en x si:

$$\exists \theta > 0 \;/\; x + \theta d \in P$$



Dirección Básica Factible

- Sea x una sbf y B={B(1),…B(m)} los índices de las variables básicas.
  - Sabemos que $$x_B = \bar{b} = A_B^{-1} b$$ $$x_i = 0 \quad \forall i \notin B$$
  - Supongamos que queremos movernos de x a otro punto, eligiendo una de las variables no básicas "j"(que inicialmente vale 0) y aumentándole su valor sin modificar las demás variables no básicas.
  - Usaremos la dirección: $$d = (d_B \mid d_N)'$$ $$d_B = (d_{B(1)}, \ldots, d_{B(m)})'$$ $$d_N = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)'$$
    - Donde d_N tiene sus componentes nulas excepto j, en la que vale 1.

Dirección Básica Factible

- Ahora nos movemos en la dirección d hacia el punto:

$$x + \theta d \ / \ \theta > 0$$

- Es decir $\begin{matrix} x_B + \theta d_B \\ x_N + \theta d_N \end{matrix}$

  - Como sólo interesan los puntos factibles se necesita que:

$$A(x + \theta d) = b$$

  - Pero como x ya era factible $(Ax = b)$ se necesita que $Ad = 0$

$$Ad = \sum_{i=1}^{n} A_i d_i = \sum_{i=1}^{m} A_{B(i)} d_{B(i)} + A_j = A_B d_B + A_j = 0$$

  - Despejando se obtiene la j-ésima dirección básica factible:

$$d_B = -A_B^{-1} A_j$$

Dirección Básica Factible

- Al moverse en una dirección d, también se debe verificar si se mantiene la no negatividad de las variables:
  - Las variables no básicas, que valen 0 inicialmente, no sufren cambios, excepto la variable x_j, la que sólo puede aumentar, ya que $d_j = 1 \; y \; \theta > 0$
  - Para las variables básicas hay 2 casos:
    - El punto de partida x es no degenerado, lo que implica que $x_B > 0$ y para un θ suficientemente pequeño $x_B + \theta d_B \geq 0$
    - El punto de partida x es degenerado, es decir, existe $x_{B(i)} = 0$, y puede ocurrir que la correspondiente componente de d sea negativa, violando inmediatamente la no negatividad para cualquier valor de θ

$$d_{B(i)} = \left(-A_B^{-1} A_j \right)_{B(i)} < 0$$

Dirección Básica Factible

- Al moverse en esta dirección la tasa de cambio en la función objetivo estará dada por $c'd$

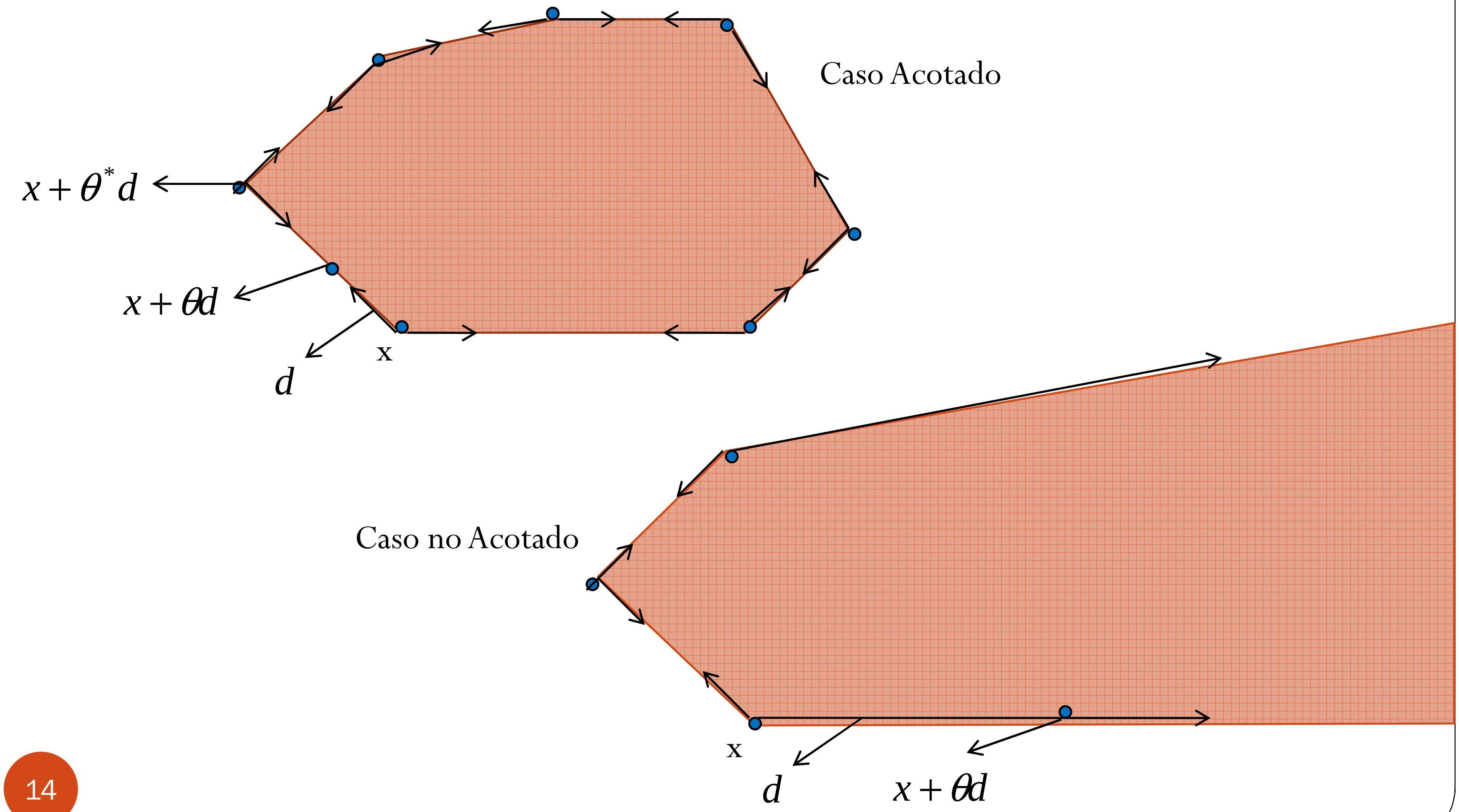
$$c'd = c'_B d_B + c_j$$

- Reemplazando d_B se recupera el costo reducido de la variable no básica j:

$$c'd = c_j - c'_B A_B^{-1} A_j = \bar{c}'_j$$

  - Luego, si el costo reducido de la variable j es negativo, conviene moverse en la j-ésima dirección básica, ya que la función objetivo disminuye.
  - Si es positivo, no conviene moverse el esa dirección, pues se empeora el valor de la función objetivo.
  - Si es cero, es indiferente el moverse en esa dirección.

Dirección Básica Factible



Condiciones de Optimalidad

- Sea x un sbf y sea $\bar{c}$ el vector de costos reducidos correspondiente:
  - a) Si $\bar{c} \geq 0$, entonces x es óptimo
  - b) Si x es óptimo y no degenerado, entonces $\bar{c} \geq 0$

- Una base se dice óptima si cumple factibilidad y no negatividad de los costos reducidos:
  - a) $\bar{b} = A_B^{-1} b \geq 0$ y
  - b) $\bar{c}' = c' - c'_B A_B^{-1} A_N \geq 0$

Desarrollo del Método Simplex

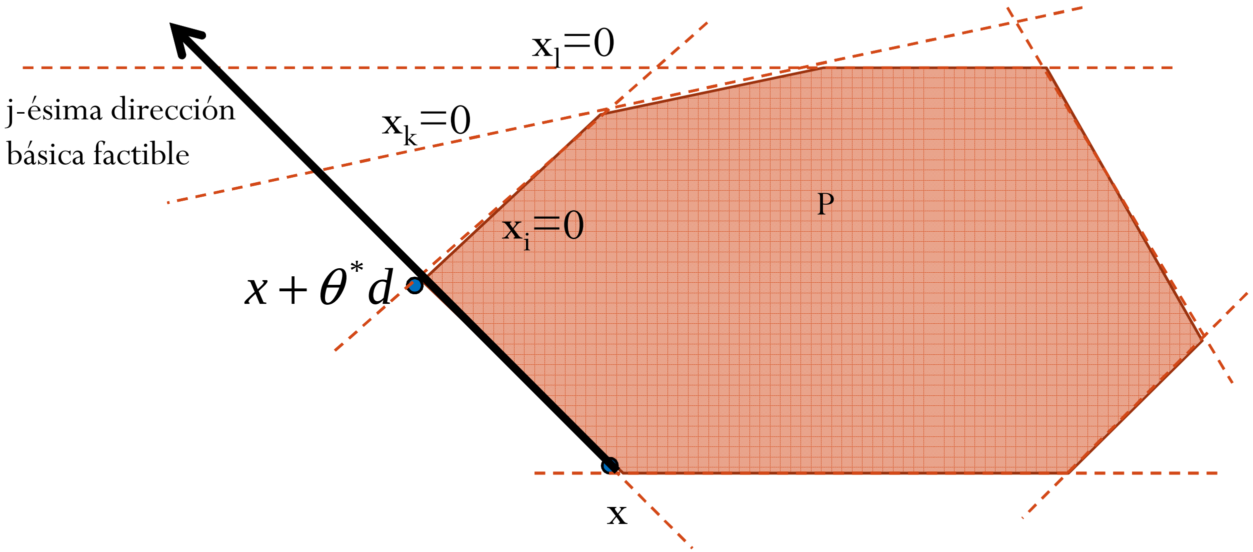
- Hasta ahora sabemos:
  - Verificar si la sbf actual es óptima
  - Cómo movernos desde una sbf a través de la j-ésima dirección básica factible
- Falta por saber:
  - Cuánto moverse a lo largo de la j-ésima dirección básica factible
  - Cómo escoger esa dirección

- En lo que sigue asumiremos que todas las sbf son no degeneradas.

Desarrollo del Método Simplex

- Supongamos que en la sbf x se tiene que el j-ésimo costo reducido es negativo. Luego, es conveniente moverse en la j-ésima dirección básica factible.
  - Como al moverse en esta dirección se está reduciendo el valor de la función objetivo, conviene moverse lo máximo posible, manteniendo la factibilidad, luego se escoge θ^* que cumple:

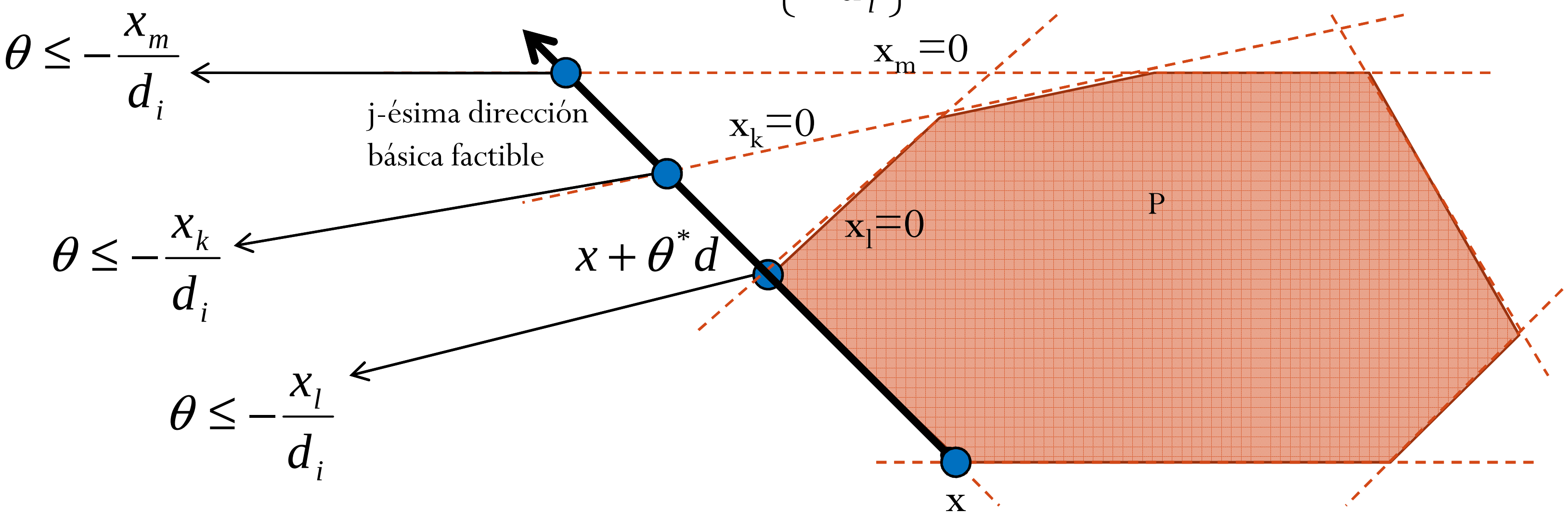
$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \,/\, x + \theta d \in P\}$$



Desarrollo del Método Simplex

- La única forma en que se viola la factibilidad del problema al moverse en una **dirección básica factible** es si alguna componente se hace negativa. Luego hay 2 casos:
  - Si $d \geq 0$ entonces $x + \theta d$ nunca se hace infactible y se tiene que $\theta^* = \infty$
  - Si $d_i < 0$ para alguna componente i, entonces $x_i + \theta d_i \geq 0 \Rightarrow \theta \leq -\dfrac{x_i}{d_i}$
  - Esto debe cumplirse para todo i tal que $d_i < 0$, luego:

$$\theta^* = \min_{\{i/d_i<0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}$$



Desarrollo del Método Simplex

- Ahora estamos en $x+\theta^* d$
  - Notar que la variable no básica x_j ya no es nula y vale θ^*

$$x_j+\theta^* d=0+\theta^* 1=\theta^*$$

  - Notar también que la variable básica x_l ahora es nula

$$\theta^*=-\frac{x_l}{d_l} \quad \Rightarrow \quad x_l+\theta^* d_l=0$$

- Esto sugiere que la variable x_j reemplace a x_l en la base
  - Se dice que x_j **entra a la base** y x_l **sale de la base**
- **Teorema:**
  - La nueva matriz $\hat{A}_{B(i)}=\begin{cases} A_{B(i)} & i \neq l \\ A_j & i=l \end{cases}$ tiene columnas l.i. y, por lo tanto es una matriz básica
  - El punto $y=x+\theta^* d$ es la sbf asociada a la matriz $\hat{A}_B$

Una Iteración de Simplex

1. Comenzamos con una base $A_{B(1)},\ldots,A_{B(m)}$ y una sbf asociada x.

2. Calcular los costos reducidos para todas las variables no básicas $\bar{c}'_j = c'_j - c'_B A_B^{-1} A_j$. Si todos son no negativos entonces la sbf actual es óptima y el algoritmo termina. Si no, escoger algún j con $\bar{c}'_j < 0$

3. Calcular j-ésima dirección básica factible $d = -A_B^{-1} A_j$. Si ninguna de sus componentes es negativa entonces el problema es no acotado, su óptimo es $-\infty$ y el algoritmo termina.

Una Iteración de Simplex

4. Si alguna componente de d es negativa, calcular

$$\theta^* = \min_{\{i \in B / d_i < 0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}$$

5. Sea l tal que $\theta^* = -\frac{x_l}{d_l}$. Formar una nueva base reemplazando A_l con A_j. Si "y" es la nueva sbf, sus valores están dados por:

$$y_j = \theta^*$$

$$y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* d_{B(i)}$$

Finitud de Simplex

Teorema:

- Asumiendo que el conjunto factible es no vacío y que todas las sbf's son no degeneradas, entonces el método Simplex termina en un número finito de iteraciones y entrega una de las siguientes posibilidades:
  - Una base B óptima y su correspondiente sbf que es óptima.
  - Una dirección d de crecimiento factible e infinito, luego el costo óptimo es menos infinito.

Simplex con Degenerancia

- Si se usa exactamente el mismo algoritmo en presencia de degenerancia pueden ocurrir las siguientes posibilidades:

  - Si la sbf actual **x** es degenerada puede ocurrir que $\theta^* = 0$ con lo cual la nueva sbf **y** es la misma que **x**. En este caso, a pesar de que se obtiene una base distinta se mantiene la misma sbf asociada a ambas bases.

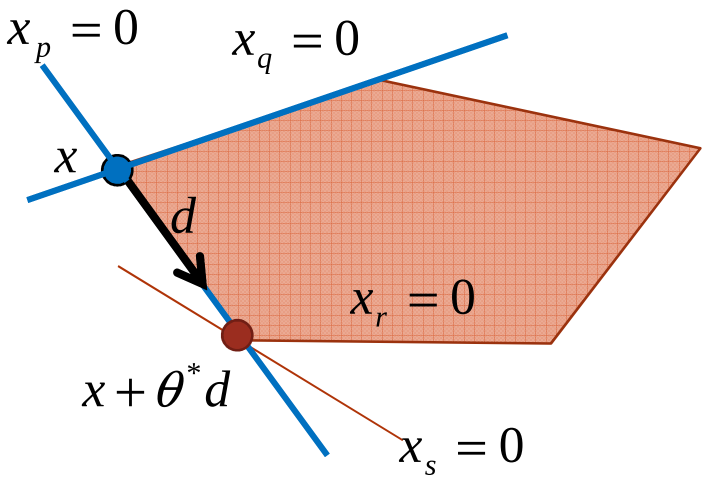
  - Si $\theta^* > 0$ puede ocurrir que más de una de las variables básicas se haga cero en el nuevo punto $x + \theta^* d$. Como sólo una de ellas sale de la base y la otra se mantiene en ella valiendo cero, la nueva sbf es degenerada.

Simplex con Degenerancia

- Al moverse a $x+\theta^{*}d$ se tiene que hay 2 variables que se anulan:

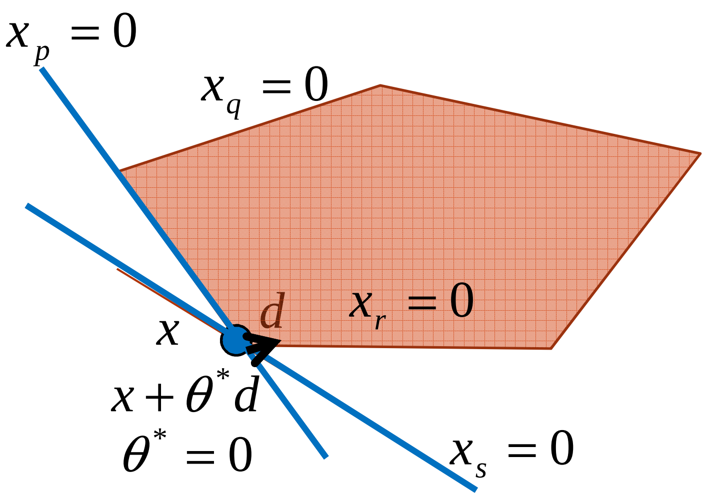
  $x_r = 0$ y $x_s = 0$.

  - Luego puede escogerse cualquiera de ellas para salir de la base.



- Al intentar moverse en la dirección d, se tiene que $\theta^{*} = 0$

  - Luego el nuevo punto corresponde al mismo punto anterior.



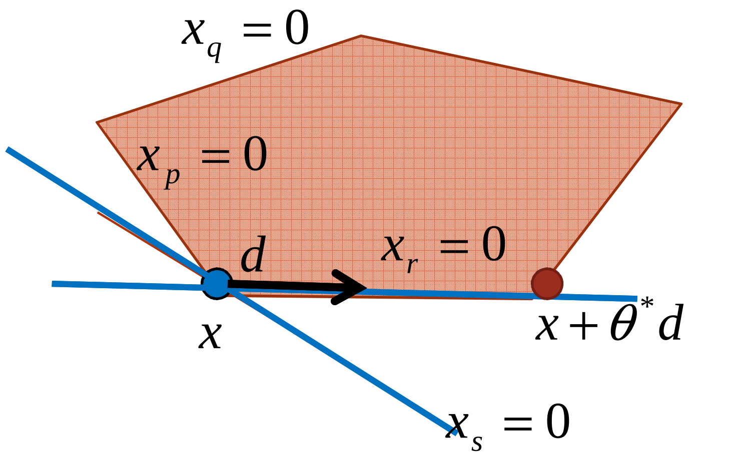
Simplex con Degenerancia

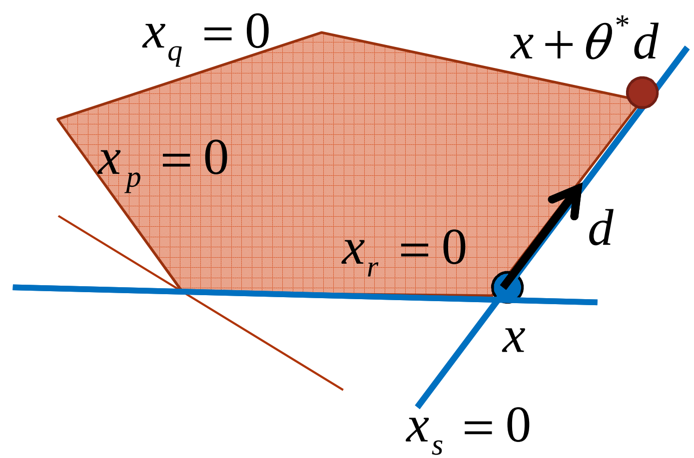
- En estas condiciones el algoritmo puede, eventualmente, volver a la base inicial y quedar atrapado en un loop infinito.

- Para evitar esto se utilizan las llamadas **reglas de pivoteo** las cuales sirven para elegir qué variables entran y salen de la base en cada iteración.

Simplex con Degenerancia

- El algoritmo puede quedarse más de una iteración en el mismo punto x.
  - Lo ideal sería garantizar que no se quedará atrapado en un loop infinito.





- Para ello existen las reglas de pivoteo…

Simplex con Degeneracia

- **Criterios de entrada a la base:**
  - Escoger la variable que tenga el mínimo costo reducido (asegura la máxima tasa de mejora en la función objetivo en cada iteración)
  - Escoger la primera variable que tenga costo reducido negativo en orden lexicográfico (es mucho más simple y tiene menor costo computacional)

- **Criterios de salida de la base:**
  - Si hay más de una variable que se anula en la nueva sbf, escoger la primera en orden lexicográfico (la que tenga el menor índice).
- Usando estos criterios se logra evitar que el método Simplex se quede atrapado en un loop.

El Método Simplex

Basado en Bertsimas, Tsitsiklis
"Introduction to Linear Optimization"
Chap. 3
IN3701 – Modelamiento y Optimización
Nelson Devia C.