INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf
Coordinador: Daniel Lillo
Auxiliares: Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

**IN3701 – Modelamiento y Optimización**
**Auxiliar 3**
**3 de Septiembre de 2010**

**Problema 1**

La exitosa compañía Multilever lo ha contratado a usted para que le ayude a diseñar su plan de marketing para el próximo año. La empresa comercializa una gran variedad de productos, por lo que sus gastos en publicidad tienen un gran impacto en sus utilidades.

Existen K medios de comunicación, a través de los cuales la empresa puede publicitar sus productos. Cada medio m cobra una cantidad fija $CF_{mt}$ por ser utilizado el día t, sin importar la cantidad de productos publicitados ni las apariciones de cada uno. Además, hay un costo variable de $CV_{imt}$ por cada aparición del producto i en el medio m el día t. Por otro lado, se ha estimado que por cada aparición del producto i en el medio m el día t se obtiene un ingreso adicional de $I_{imt}$.

El Gerente de Marketing, Deivid Nilson, le cuenta que si un mismo producto aparece en demasiados medios de comunicación en el mismo día, produce un efecto de "saturación" en los clientes que es contraproducente para la imagen de la compañía, por esta razón, Deivid quiere que en cada día t, ningún producto aparezca en más del $q_t$ porciento de los medios de comunicación disponibles. Además, le cuenta que otro de los efectos indeseados es la "canibalización", que consiste en que al hacer publicidad a uno de los productos disminuyen las ventas del otro, debido a un efecto de sustitución. Sea el conjunto $CAN$ de los pares $(i, j)$ en los que hay canibalización entre i y j. Para evitar esto, el gerente le pide que no haya publicidad en el mismo día y mismo medio para dos productos entre los que haya canibalización.

Debido a que los medios de comunicación también deben publicitar otras compañías y tienen una capacidad limitada, le han asignado a Multilever una cantidad de apariciones máxima para cada día t de $MaxAp_{mt}$, la que incluye a todos los distintos productos de la empresa.

Por último, se necesita mantener todos los productos en el "Top of Mind" de los clientes, es decir, recordarles periódicamente su existencia para que estén entre sus primeras preferencias. Para esto, se ha decidido que cada semana (de lunes a domingo) debe haber una cantidad mínima de apariciones $A_i$ de cada producto i, considerando todos los medios de comunicación. Para esto, considere el conjunto $L = \{1,8,15,22,...,T-6\}$ de todos los lunes en el horizonte de planificación de T días.

Se le pide que escriba un modelo de programación lineal entera que permita encontrar la estrategia de publicidad que maximice las utilidades de Multilever durante el horizonte de planificación.

**Problema 2**
Sea f : $R^n \to R$ una función convexa y sea c alguna constante. Pruebe que el conjunto $S = \{x \in R^n : f(x) \le c\}$ es convexo.

**Problema 3**
Considere el poliedro generado por el siguiente conjunto de restricciones del tipo $\{a^i x_i \le b_i : i \in I\}$:

$$x_1 + x_2 \le 3; \quad x_1 \le 2; \quad x_1 - x_2 \le 1; \quad x_2 \le 2; \quad x_1, x_2 \ge 0$$

a) Grafique el poliedro
b) Encuentre todas las soluciones básicas. ¿Cuáles de ellas son soluciones básicas factibles?
c) Encuentre las restricciones activas en los puntos (1,2) y (2,1). ¿Son los vectores $\{a^i : i \in I^*\}$ linealmente independientes?
d) Escriba el poliedro en forma estándar
e) Considere el punto (0,2). Encuentre el valor de las variables de holgura en ese punto y determine la base asociada, es decir, los vectores $\{A_i : i \in B\}$ con $\|B\| = m$ que son l.i.

**Problema 4**
Considere el poliedro en forma estándar $P = \{x \in R_+^n : Ax = b\}$. Suponga que la matriz $A \in R^{m \times n}$ es de rango completo. Para cada una de las siguientes afirmaciones, establezca si es verdadera o falsa. Si es verdadera, demuestre, si es falsa, dé un contra ejemplo.
1. Si $n = m + 1$, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.
2. El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.
3. Toda solución óptima posee a lo más m componentes no-cero.
4. Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.
5. Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf
Coordinador: Daniel Lillo
Auxiliares: Víctor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

**IN3701 – Modelamiento y Optimización**
**Auxiliar 4**
**3 de Septiembre de 2010**

**Problema 1**

**VARIABLES**

$$x_{imt} = \begin{cases} 1 & si\ se\ publicita\ el\ producto\ i\ en\ el\ medio\ m\ el\ día\ t \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$$y_{imt} = cantidad\ de\ apariciones\ del\ producto\ i\ en\ el\ medio\ m\ el\ día\ t$$

$$z_{mt} = \begin{cases} 1 & si\ se\ usa\ el\ medio\ m\ el\ día\ t \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

**RESTRICCIONES**

1) **Si no se usa el medio, no se publicitan productos:**
   $$x_{imt} \le z_{mt} \quad \forall i, m, t$$
2) **Si no se publicita el producto, no hay apariciones de él:**
   $$y_{imt} \le x_{imt} \cdot M \quad \forall i, m, t, M >> 1$$
3) **No saturar**
   $$\sum_m x_{imt} \le q_t \cdot K \quad \forall i, t$$
4) **Canibalización**
   $$x_{imt} + x_{jmt} \le 1 \quad \forall (i, j) \in CAN, \forall m, t$$
5) **Máximo de apariciones**
   $$\sum_i y_{imt} \le MaxAp_{mt} \quad \forall m, t$$
6) **Top of Mind**
   $$\sum_{\tau=t}^{t+6} \sum_m y_{im\tau} \ge A_i \quad \forall i, \forall t \in L$$
7) **Naturaleza de las Variables**
   $$x_{imt}, z_{mt} \in \{0,1\},\ y_{imt} \in Z_0^+$$

**FUNCIÓN OBJETIVO**

$$Max \sum_{i,m,t} \left(I_{imt} - CV_{imt}\right) \cdot y_{imt} - \sum_{m,t} CF_{mt} \cdot z_{mt}$$

**Problema 2**

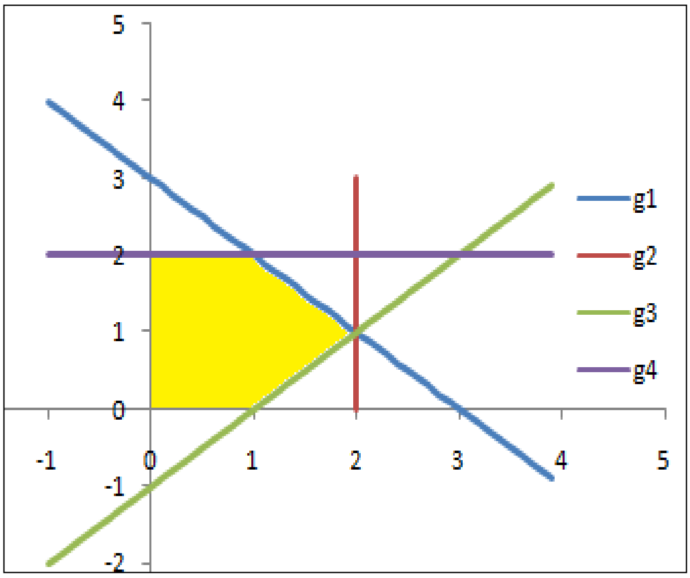
Sean x, y en $S = \{x \in R^n : f(x) \le c\}$ y $\lambda \in [0,1]$.
Debemos probar que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$

$f(z) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, ya que f es una función convexa
$\le \lambda c + (1-\lambda)c$, ya que x, y pertenecen a S
$= c$

Por lo tanto $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S$, luego S es un conjunto convexo.

**Problema 3**

a)




b) Soluciones básicas: (0,0), (0,-1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2), (3,0), (3,2).
Soluciones básicas factibles: (0,0), (0,2), (1,0), (1,2), (2,1)

c) Punto (1,2): g1, g4

g1: $(1,1)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 3$, g4: $(0,1)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 2$

Los vectores (1,1) y (0,1) son l.i.

Punto (2,1): g1, g2, g3

g1: $(1,1)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 3$, g2: $(1,0)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 2$, g3: $(1,-1)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \le 1$

Los vectores (1,1), (1,0) y (1,-1) no son l.i.

d) Forma estándar:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ &x_1 + x_4 = 2 \\ &x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\ &x_2 + x_6 = 2 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) Punto (0,2)
Variables:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Escojamos como base las variables no nulas en ese punto:
$B = \{2,3,4,5\}, \|B\| = 4$ (4 es el número de restricciones)
Los vectores de la matriz A asociados son l.i.:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Problema 4**

**1. Si $n = m+1$, entonces P posee a lo más dos soluciones básicas factibles.**

Verdadero: Como P esta en forma estándar, tiene al menos un punto extremo $v_0$. si no existen más puntos extremos, el resultado se tiene y no hay nada más que demostrar. Sea $v_i$ otro punto extremo. Definamos $d_i = v_0 - v_i$, $d_i$ satisface $Ad_i = 0$, pero la dimensión de $\{d : Ad = 0\} = n - m = 1$, por lo que existe $d_0 \neq 0$ tal que $d_i = \alpha_i d_0$ para cualquier $d_i$.
Sea $\alpha_\infty = \max\{\alpha_i : v_i \text{ es punto extremo}\}$, y sea $v_\infty$ donde se alcanza el máximo. Entonces si $\alpha_i < \alpha_\infty$, tenemos que $v_i$ no es punto extremo por ser combinación convexa de $v_0$ y $v_\infty$. Esto implica que $\alpha_i = \alpha_\infty \ \forall i$, por lo que $|\{v_i : v_i \text{ es punto extremo}\}| = 2$.

**2. El conjunto de todas las soluciones óptimas es acotado.**

Falso: Basta considerar $P := \{x \in R_+^n\}$ y minimizar $z = -e_i$, donde $e_i$ es el i-ésimo vector canónico. En este caso el conjunto óptimo son los $\{x \in R_+^n : x_i = 0\}$, que es no-acotado.

**3. Toda solución óptima posee a lo más m componentes no-cero.**

Falso: Basta considerar:

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es óptimo y posee más de una componente no cero.

**4. Si hay más de una solución, entonces el cardinal de las soluciones óptimas es no numerable.**

Verdadero: Si hay más de una solución óptima, entonces hay dos: $x_1$, $x_2$ y por convexidad todas las combinaciones convexas de ellas, es decir $\{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \in [0,1]\}$, entonces $|\{x : x \text{ es optimo}\}| \ge |\{\lambda : \lambda \in [0,1]\}|$.

**5. Si hay más de una solución óptima, entonces hay al menos dos soluciones básicas factibles óptimas.**

Falso: considere $P := \{x \in R_+^n\}$ y minimizar $z = -e_i$, donde $e_i$ es el i-ésimo vector canónico. P posee sólo un punto extremo, y el conjunto de soluciones óptimas tiene más de dos puntos.

**Dudas y/o Comentarios a:**
**ndevia@ing.uchile.cl**