INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Richard Weber, Rodrigo Wolf

Auxiliares: Victor Bucarey, André Carboni, Nelson Devia, Diego Vergara

IN3701 – Modelamiento y Optimización
Auxiliar 1
19 de Agosto, 2010

Problema 1

El nuevo programa de postgrado MPA de una prestigiosa universidad ha recibido n postulaciones excelentes para su primera generación y por capacidad no puede aceptar todas. Tiene el problema de seleccionar las hasta m postulaciones más adecuadas para el programa (m<n).

Como es de carácter público no puede solamente seleccionar para maximizar el beneficio económico del programa. Cada generación tiene que cumplir además con los siguientes criterios.

Por lo menos 40% de los aceptados tienen que pertenecer a cada sexo. El parámetro S_i indica el sexo del postulante i (i=1, …, n). S_i = 1 significa femenino y S_i = 0 significa masculino.

El programa busca tener impacto en regiones por lo que por lo menos 50% de los aceptados de cada generación deben venir de regiones. El parámetro R_i indica la proveniencia del postulante i (i=1, …, n). R_i = 1 significa regiones y R_i = 0 significa RM.

Es importante lograr alta exigencia académica por lo que el programa quiere aceptar alumnos que en promedio tengan un puntaje de por lo menos Pmin. P_i es el puntaje del postulante i (i=1, …, n).

El ingreso generado por cada generación debe superar en por lo menos 20% los costos asociados C (UM).

En un principio cada alumno aceptado tiene que pagar un arancel de A UM.

El programa ofrece hasta B becas para alumnos excelentes (B < m). Los criterios para otorgar estas becas son los siguientes.

Un postulante i con un puntaje P_i mayor que 750 paga sólo 50% del arancel si viene de la RM y paga sólo 25% del arancel si viene de regiones.

El objetivo es maximizar el ingreso generado por cada generación aceptada.

1. Plantee un modelo de Programación Lineal para resolver este problema.
2. ¿Son todas las restricciones mencionadas necesarias? Comente.
3. ¿Se está favoreciendo a alguien con la formulación actual?

Problema 2

Considere el problema de localización de plantas de una empresa productora de plástico. Éste considera N posibles localizaciones y K alternativas tecnológicas.

El producto puede ser transportado a Santiago para su venta por contrato o a Valparaíso para su exportación. Se considera, para este último caso, que la cantidad a exportar es libre pero con tope EXPF y que para cada período se ha estimado una curva de demanda. Considere, además, que no se puede almacenar el producto.

Además, se conocen los siguientes parámetros:

$PEXP_1^t$	Precio unitario de exportación para el tramo [0, EXP1] en el período t.
$PEXP_2^t$	Precio unitario de exportación para el tramo [EXP1, EXPF] en el período t. $PEXP_1^t > PEXP_2^t$
$PSTGO^t$	Precio unitario de venta en Santiago en el período t.
$DSTGO^t$	Demanda fija a cumplir para Santiago en el período t.
CAP_k	Capacidad de la planta con tecnología k.
$CINV_{ik}^t$	Costo de inversión en una planta con tecnología k en la localización i y período t.
$COPER_{ik}^t$	Costo unitario de producción de la planta con tecnología k y localización i en el período t. Incluye costos de materia prima, mantenciones, etc.
$CTRANS_{ij}^t$	Costo unitario de transporte desde la planta ubicada en i al destino j (j = 1, Santiago, o j = 2, Valparaíso) en el período t.

Plantee un modelo de programación lineal mixta para decidir cuántas plantas abrir, sus localizaciones y alternativas tecnológicas de tal modo de maximizar el beneficio actual neto (BNA). Considere un horizonte de T períodos y que los parámetros monetarios para cada período ya llevan incorporada la tasa de descuento. Defina claramente variables, restricciones y función objetivo.

<u>Solución:</u>

Problema 1:

1. <u>Variables de decisión</u>:

$$Xi = \begin{cases} 1 & \text{Si se acepta al alumno i} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Yi = \begin{cases} 1 & \text{Si alumno i recibe beca} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Nota: si el alumno pone una variable 1 si tienen mas de 750 pts y cero sino, sólo tendrá el puntaje en la restricción de asignar las becas (h) si relaciona dicha variable con el puntaje mediante una restricción y dicha restricción está bien planteada.

<u>Restricciones</u>:

a. Relación entre variables:

$$Yi \le Xi$$

b. Se aceptan a lo más m postulantes:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi \le m$$

c. Al menos 40% de los aceptados deben ser de cada sexo:

$$0{,}4 * \sum_{i=1}^{n} Xi \le \sum_{i=1}^{n} Xi * Si \le 0{,}6 * \sum_{i=1}^{n} Xi$$

d. 50% de los aceptados deben venir de regiones:

$$0{,}5 * \sum_{i=1}^{n} Xi \le \sum_{i=1}^{n} Xi * Ri$$

e. Puntaje promedio de los alumnos debe ser al menos Pmin:

$$P_{\min} * \sum_{i=1}^{n} Xi \le \sum_{i=1}^{n} Xi * Pi$$

f. Ingreso generado debe superar en al menos 20% los costos:

$$\sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A \ge 1{,}2 * C$$

g. Máximo B becas:

$$\sum_{i=1}^{n} Yi \le B$$

h. Criterio para otorgar becas:

$$(Xi - Yi) * Pi \leq 750$$

Explicación: Si el puntaje de un postulante i es Pi mayor que 750 (por ejemplo 800), esto obliga a que (Xi – Yi)=0 para que se cumpla la restricción, con lo cual Xi=Yi=0 ó Xi=Yi=1 (El caso Xi=0 e Yi=1 también es factible, ya que -800<750 cumple la restricción, pero éste se descarta por la restricción "a"), con lo que obligatoriamente debemos darle beca al postulante i si lo aceptamos.

En caso de que un Pi sea menor que 750 (por ejemplo 700), el término (Xi – Yi) puede valer tanto 0 como 1 para que se cumpla la restricción, con lo que se podría llegar a pensar que le estamos dando beca a los alumnos con puntaje inferior a 750 (caso Xi=Yi=1). Sin embargo hay que notar que al resolver el PPL, al estar maximizando el ingreso, el programa que lo resuelve tratará de asignar la menor cantidad de becas posibles, pues éstas reducen el ingreso. Si el programa tiene la opción de decidir entre darle beca a un individuo con puntaje inferior a 750 o no, decidirá no hacerlo pues esto le genera mayor ingreso. Por esta razón, no hay problema en que la restricción permita darle beca con un puntaje menor a 750 ya que, gracias a la función objetivo, esto no ocurrirá.

i. Naturaleza de las variables:

$$Xi, Yi \in \{0,1\}$$

<u>Función objetivo:</u> (1 pto)

$$\max\left\{ \sum_{i=1}^{n} Xi * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * Ri * 0{,}75 * A - \sum_{i=1}^{n} Yi * (1 - Ri) * 0{,}5 * A \right\}$$

2. Se puede eliminar la restricción i: ingreso > 1,2 * costos, pues al maximizar el ingreso podemos ver si se da o no esta restricción.
También se puede eliminar la restricción a: relación entre variables, pues dar becas disminuye la función objetivo, lo que hace que no tenga sentido asignar becas a postulantes que no hayan sido aceptados.

3. Nota: Lo que sigue tiene puntaje binario, es decir, todo o nada. El alumno puede tener máximo 1 punto, aún si contesta ambas alternativas planteadas.

Alternativa 1 (1 pto): Al maximizar el ingreso se favorece a los postulantes de menor puntaje, ya que se intentará dar la menor cantidad de becas posibles.
Fijense que el solver quiere dar la menor cantidad de becas posibles, ya que las becas disminuyen la utilidad en la función objetivo. Entonces, al resolver el problema asignará primero a las personas más cercanas al puntaje Pmin (de forma que en promedio el puntaje sea casi igual o igual a Pmin). Así, asignará una persona con puntaje sobre Pmin y luego suficientes personas con puntaje bajo Pmin para que se mantenga el promedio en Pmin. Luego se repite el proceso varias veces (asignar una persona con puntaje mayor a Pmin y suficientes personas con puntaje menor a Pmin para mantenerse cercano al puntaje Pmin, respetando la restricción "e"). Bajo este esquema podría incluso llegar a ocupar todos los cupos sin asignar ninguna beca, respetando todas las restricciones.

Alternativa 2 (0,5 pts): La restricción “h” obliga a que un alumno con más de 750 y que ha sido aceptado tenga beca. Por lo tanto, si se nos acaban las B becas, los alumnos restantes con más de 750 puntos no serán aceptados en la universidad. No se les da la posibilidad de pagar el arancel completo, simplemente se rechazan.

Problema 2

Variables:

$$x_{ik}^{t} = \begin{cases} 1 & si\ se\ construye\ planta\ i\ con\ tecnología\ k\ en\ periodo\ t \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

$y_{ik}^{t} = cantidad\ producida\ por\ planta\ i\ con\ tecnología\ k\ en\ periodo\ t$

$w_{ij}^{t} = cantidad\ trasnportada\ de\ planta\ i\ a\ destino\ j\ en\ periodo\ t$

$z_{1}^{t} = cantidad\ exportada\ a\ precio\ PEXP_{1}^{t}\ en\ periodo\ t$

$z_{2}^{t} = cantidad\ exportada\ a\ precio\ PEXP_{2}^{t}\ en\ periodo\ t$

Restricciones:

1. Naturaleza de las Variables:

$$x_{ik}^{t} \in \{0,1\},\ y_{ik}^{t}, w_{ij}^{t}, z_{1}^{t}, z_{2}^{t} \geq 0 \quad \forall i, j, k, t$$

2. Cada planta se construye a lo más una vez y a lo más con una tecnología:

$$\sum_{t}\sum_{k} x_{ik}^{t} \leq 1 \quad \forall i$$

3. Capacidad de producción:

$$y_{ik}^{t} \leq CAP_{k} \cdot \sum_{\tau=1}^{t} x_{ik}^{\tau} \quad \forall i, k$$

4. Cantidad transportada:

$$\sum_{j} w_{ij}^{t} = \sum_{k} y_{ik}^{t} \quad \forall i, t$$

5. Demanda de Santiago:

$$\sum_{i} w_{i,STGO}^{t} = DSTGO^{t} \quad \forall t$$

6. Exportaciones:

$$z_{1}^{t} + z_{2}^{t} = \sum_{i} w_{i,VALPO}^{t} \quad \forall t$$

7. Definición de z_{1}^{t}, z_{2}^{t}:

$$z_{1}^{t} \leq EXP_{1} \quad \forall t$$

$$z_{2}^{t} \leq EXP_{F} - EXP_{1} \quad \forall t$$

Función Objetivo:

$$Max \sum_{t=1}^{T} \left\{ \begin{aligned} & PSTGO^{t} \cdot \sum_{i} w_{i,STGO}^{t} + PEXP_{1}^{t} \cdot z_{1}^{t} + PEXP_{2}^{t} \cdot z_{2}^{t} - \sum_{i}\sum_{k} CINV_{ik}^{t} \cdot x_{ik}^{t} \\ & - \sum_{i}\sum_{k} COPER_{ik}^{t} \cdot y_{ik}^{t} - \sum_{i}\sum_{j} CTRANS_{ij}^{t} \cdot w_{ij}^{t} \end{aligned} \right\}$$

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl