INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN540- Métodos estadísticos para economía y gestión
Profesores: Marcelo Henríquez, Sebastián Maldonado
Auxiliares: José Miguel Carrasco, Gabriel Espejo
Fecha: 25 de agosto de 2010

Auxiliar Nº2

Problema 1

El profesor olvida poner su despertador 3 de cada 10 días. Además, ha comprobado que uno de cada 10 días en los que poner el despertador acaba no levantándose a tiempo para dar su primera clase, mientras que 2 de cada 10 días en los que olvida poner el despertador llega a tiempo a su primera clase.

1. Identifica y da nombre a los sucesos que aparecen en el enunciado.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el profesor llegua a tiempo a dar su primera clase?
3. Si un día no ha llegado a tiempo, ¿Qué probabilidad hay de que olvidase poner el despertador la noche anterior?

Solución:

En primera lugar, conviene identificar el experimento aleatorio que se está realizando. Este consiste en tomar un día al azar en la vida del profesor y analizarlo en base a los siguientes sucesos.

1. O: cuando el profesor olvida poner su despertador.
2. T: Cuando el profesor llega tarde a su primera clase.

Es relevante constatar que tanto {O, ~O} y {T,~T} forman un sistema completo de sucesos. A continuación traducimos en terminos de la probabilidad de los sucesos anteriores todos los datos entregados por el enunciado.

$P(O) = 3/10$; $P(\sim T|O) = 2/10$

$P(\sim O) = 7/10$; $P(T|\sim O) = 1/10$

El suceso de “llegar a tiempo a clases” es el complementario de T, por tanto nos piden que calculemos $P(\sim T)$. Puesto que {O,~O} es un sistema completo de sucesos, podemos aplicar la fórmula de probabilidad total, de donde se obtiene que:

$$P(\sim T) = P(\sim T|O)P(O) + P(\sim T|\sim O)P(\sim O)$$

En la expresión anterior aparecen varios de los datos proporcionados por el enunciado, sin embargo no conocemos directamente el valor de $P(\sim T|\sim O)$, pero éste aparece de $P(\sim T|\sim O) = 1- P(T|\sim O) = 1 – 1/10 =9/10$. De esta forma, la experesión anterior se puede escribir como:

$$P(\sim T) = (2/10)*(3/10) + (9/10)*(7/10) = 69/100 = 0{,}69=69\%$$

Junto con esto, nos piden calcular la probabilidad del suceso O sabiendo que ha ocurrido el suceso T, esto es P(O|T). Dado que {O, ~O} es un sistema completo de sucesos, podemos utilizar el teorema de Bayes para calcular P(O|T). Asi,

$$P(O|T) = (P(T|O)P(O)) / [P(T|O)P(O) + P(T|O)P(O)]$$

En la expresión anterior nos falta por conocer P(T|O).utilizando que P(T|O) = 1 – P(~T|O) = 1 – 2/10 = 8/10, se llega a que:

$$P(O|T) = ((8/10)*(3/10)) / [(1/10)*(7/10) + (8/10)*(3/10)]=24/31=0{,}7742$$

Problema 2

Un banco local revisa su política de tarjetas de crédito, con el objetivo de cancelar algunas de ellas. En el pasado, 5% de los clientes con tarjeta ha pasado a ser moroso, esto es, ha dejado de pagar sin que el banco pudiera recuperar la deuda. Además, el banco ha comprobado que la probabilidad de que un cliente normal se atrase en un pago es de 0,2. Naturalmente, la probabilidad de que un cliente moroso se atrase en un pago es de 1.

1. Identifica y da nombre a los sucesos que aparecen en el enunciado.
2. Elegido un cliente al azar. ¿Qué probabilidad hay de que el cliente se atrase en un pago mensual?
3. Si un cliente se atrasa en un pago mensual, calcular la probabilidad de que ese cliente acabe conviritiéndose en moroso.
4. Al banco le gustaría cancelar la línea de crédito de un cliente si la probabilidad de que éste acabe convirtiéndose en moroso es mayor que 0,25. De acuerdo con los resultados anteriores, ¿Debe cancelar una línea de crédito si un cliente se atrasa en un pago, ¿Por qué?

Solución

Corresponde en primera instancia identificar el experimento aleatorio. En este caso consiste en elegir al azar a un cliente del banco que tenga tarjeta de crédito y preguntarnos los siguientes sucesos. Para un cliente cualquiera decimos que ha sucedido el suceso:

M = cuando el cliente es moroso
A = cuando el cliente se ha atrasado en un pago mensual.

Los conjuntos de sucesos {M, ~M} y {A,~A} son dos sistemas completos de sucesos. Junto con esto sabemos, del enunciado que:
P(M) = 0,05
P(A|~M) = 0,2
P(A|M) = 1

Es sencillo darse cuenta de que nos piden calcular P(A). Como {M,~M} es un sistema completo de sucesos, aplicamos la fórmula de probabilidad total y se tiene que:

$$P(A) = P(A|\sim M)P(\sim M) + P(A|M)P(M)$$

Donde $P(\sim M) = 1- P(M) = 0,95$. Por lo tanto $P(A) = 0,24$.

Para calcular la probabilidad de que el cliente se convierta en moroso (suceso M) sabiendo que se ha atrasado en una mensualidad (suceso A), lo que significa $P(M|A)$. Como $\{M,\sim M\}$ es un sistema completo de sucesos, aplicando Bayes se tiene que :

$$P(M|A) = (P(A|M)P(M)) / [P(A|\sim M)P(\sim M) + P(A|M)P(M)]$$

$$P(M|A) =0,2083$$

De acuerdo a este resultado la probabilidad de que un cliente que se atrasa en un pago acabe convirtiéndose en moroso es 0,2083, que es menor a la probabilidad exigida por el banco. Por lo tanto, no debería cancelarse la cuenta de un cliente que se atrase en un pago.

Problema 3

El gimnasio El primo de Sumosol, ha comprobado que el 20% de sus alumnos se dan de baja durante el primer mes y el 80% restante permanecen todo el año. Supongamos que este año se inscribieron 20 alumnos.

1. Explica con brevedad qué es una variable aleatoria. Identifica la variable aleatoria del problema e indica qué distribución sigue.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o menos se den de baja?
3. ¿Cuál es la probabildiad de que exactamente se den de baja 4 alumnos?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que se den de baja más de 3 alumnos?
5. Al hacer la inscripción se realiza un único pago anual de 600 mil pesos. Cada alumno que permanece todo el año genera un gasto anual de 150 mil pesos. ¿Cuál es el beneficio anual esperado?,¿Cuántos alumnos se han dado de baja el primer si al final de año el gimnasio ha obtenido el beneficio esperado?

Solución

Una variable aleatoria es una aplicación X que hace corresponder un número real a cada suceso básico del espacio muestral. Después de leer el enunciado, la variable aleatoria apropiada para este caso es:

X= “ número de alumnos que se dan de baja el primer mes”

Los posibles valores que puede tomar la variable X son 0,1..., 20, luego X es una variable aleatoria discreta.
El experimento que a cada alumno le asocia un 0 si este alumno permanece durante todo el año o un 1 si este alumno se da de baja el primer mes es un experimento Bernoulli de parámetro $p = 0,2$ (probabilidad de darse de baja). De esta forma, X es la suma de 20 experimentos de Bernoulli independientes de igual p, por lo tanto X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 20$ y $p = 0,2$, esto es $X\sim B(20; 0,2)$

Nos piden la probabilidad de que el número de alumnos que se den de baja el primer mes sea igual o menor que 2, esto implica $P(X \leq 2)$. Este valor es el de la función de distribución de la binomial en el punto 2. Mirando en las tablas tenemos que $P(X \leq 2)=0,2061$

Nos piden calcular la $P(X=4) = P(X \leq 4) - P(X\leq 3)= 0,6296 -0,4114 = 0,2182$

En el caso de $P(X>3) = 1- P(X\leq 3)= 1-0,4114 = 0,5886$

Para obteenr los beneficios que entregan los alumnos tomamos que se inscribieron 20 alumnos, por lo tanto I= 20*600 = 12000 mil pesos. Como cada alumno que permanece todo el año genera un gasto anual de 150mil pesos, si X es el número de alumnos que se dan de baja el primer mes, entonces el número de alumnos que permanecen todo el año es 20-X. Por lo tanto el gasto anual esperado es G = 150*(20-X) y con esto el beneficio total es B = I -G = 9000 +150X

El Beneficio anual esperado es E(B) = 9000 + 150*E(X)
Dada la función de distribucion E(X) = np, por eso E(X) = 20*0,2 = 4.

Por lo tanto E(B) = 9600

Problema 4

Un estudio de la DGT estima que el n´mero de horas prácticas necesarias para la obtención del permiso de conducir sigue una distribución normal N (24, 9).

1. ¿Qué probabilidad hay de obtener el permiso de conducir con 20 horas de prácticas o menos?
2. ¿Cuántas horas de prácticas ha necesitado un conductor para obtener el permiso si el 68% de los conductores ha necesitado más horas de prácticas que él?

La autoescuela D'spacio ingresa por alumno una parte fija de 250 mil pesos, más 23 mil pesos por hora de práctica.

1. Calcular el ingreso esperado por alumno.
2. Calcular la desviación típica de ingreso por alumno

Solución

Para este problema escogemos como variable aleatoria
X = "número de horas de práctica necesarias para obtener el permiso de conducir"
La cual nos aseguran que sigue una distribución normal de media μ = 24 y desviación típica σ = 3, esto es N(24, 9), por lo que X es una variable aleatoria continua.

Nos piden que calculemos P (X ≤ 20), que es el valor de la función de distribución de una normal en el punto 20. Como X no sigue una distribución normal estándar, este valor no puede buscarse directamente en la tabla. Hemos de tipificar la variable, esto es, cambiamos a la variable:

$$Z = (X - \mu)/\sigma = (X - 24)/3$$

$$P (X \leq 20)= P (Z \leq (20-24)/3)=P (Z \leq -1,33)$$

Para ajutarnos a la tabla de distribuciones se utiliza:

$$P (X \leq 20)= P (Z \leq -1,33)=1- P (Z \leq 1,33)= 0,0968$$

Para la segunda parte sea x0 el número de horas prácticas que buscamos. Nos piden el valor de x0 de forma que P (X ≥ x0) = 0.68. Utilizando la variable tipificada Z tenemos que:

$$z0 = (x0 -24)/3$$

de la expresión anterior tenemos que P (Z ≥ z0) = 0.68. Utilizando la simetría de la normal tenemos que P (Z ≤ −z0) = 0.68. Buscando en la tabla obtenemos que la P (Z ≤ 0.46) = 0.6772 y P (Z ≤ 0.47) = 0.6808, por tanto −z0 es un valor comprendido entre 0.46 y 0.47, pero más cercano al segundo. Tomamos −z0 = 0.468, de donde z0 = −0.468. Despejando x0 en función de z0 tenemos que:

$$x_0 = 4 + 3z_0 = 24 + 3(-0.468) = 22.596$$

Para la tercera parte tenemos que para un alumno cualquiera, X es número de horas de práctica necesarias para obtener el permiso de conducir. Así el ingreso de la autoescuela por las prácticas de un alumno es 23X. Si añadimos la parte fija tenemos que el ingreso por alumno es $I = 250 + 23X$.
El ingreso por alumno esperado es $E(I)$. Aplicando que $E(a + bX) = a + bE(X)$, tenemos que $E(I) = E(250 + 23X) = 250 + 23E(X)$.
Como $X \sim N(24, 9)$, sabemos que $E(X) = 24$. Por tanto:
$E(I) = 250 + 23 \times 24 = 802$.

Finalmente, como $X \sim N(24, 9)$, sabemos que $Var(X) = 9$. Por tanto, $Var(I) = (23*23)*(3*3)$. Finalmente, la desviación típica del ingreso $dt(I)$ es

$$dt(I) = 23 \times 3 = 69.$$