1. REPASO DE ESTADÍSTICA

ESTADÍSTICA APLICADA

Necesidad de la Estadística.

Necesidad de **razonamientos inductivos** a partir de datos: Se hacen afirmaciones acerca de un colectivo de individuos u objetos, habiendo observado en realidad sólo una parte de ellos.

Definición de Estadística:

> *Conjunto de métodos para recoger, clasificar, representar y resumir datos, así como para hacer inferencias científicas a partir de ellos.*

Ejemplo 1.0: SNED, Sistema Nacional de Evaluación del Desempeño Docente

Estadística Descriptiva. Con el estudio de ciertos estadísticos se conocen magnitudes que representan a la globalidad de los datos disponibles de forma resumida.

Inferencia Estadística. La segunda fase es la formulación y confirmación de hipótesis, Se cuantifica el grado de certidumbre con el que se pueden establecer afirmaciones sobre los datos: Se obtienen conclusiones a partir de una información incompleta

Población: conjunto de los objetos (individuos, observaciones, etc.) que se desea observar. Puede ser finito o infinito.

Notación: Ω

Ejemplo 1.1: Los habitantes del Gran Santiago, de 18 años o más.

Muestra: parte de la población Ω seleccionada para un experimento

El análisis de la información será de gran ayuda para la **toma de decisiones** y la realización de investigaciones

No hay que olvidar que los datos disponibles suministrarán una información parcial del proceso en estudio y aunque la estadística valide unas hipótesis, el investigador deberá dar un **significado real** a las conclusiones en el contexto correspondiente.

Algunos conceptos básicos:

Observación: una observación es un objeto individual que nos sirve como fuente de datos para la realización de nuestra investigación. Reciben diferentes denominaciones: Unidades muestrales, Individuos, Observaciones, Casos, Objetos, Unidades experimentales:

$$\omega \in \Omega$$

Variable: Es una característica del individuo que puede tomar distintos valores. Cuando medimos algo representamos por un modelo numérico aquello que medimos:

$$X : \Omega \to Q$$

(Q es el conjunto de todos los valores posibles que puede tomar X sobre los elementos de Ω)

Ejemplo 1.2: La altura de una persona: asignamos un número a cada persona. Las medidas físicas, como altura y peso, se miden con un instrumento físico. Otras propiedades abstractas tales como razonamiento, inteligencia se miden indirectamente.

Valor: son los distintos estados en los que se puede encontrar una característica de un individuo. Estos pueden ser cualitativos (masculino, femenino) o cuantitativos (163 cm):

$$X(\omega) \in Q$$

Observación: Si $\Omega \subset IN$ (población finita o numerable) se anota $X_i \in Q$.

CLASIFICACIÓN DE VARIABLES

Se puede considerar tres clasificaciones de variables (dependiendo del conjunto Q):

1. Según la escala: Nominal, Ordinal, de Intervalo y de Razón.
2. Cualitativas y Cuantitativas.
3. Discretas y Continuas

Según la Escala:

Una clasificación comúnmente aceptada especifica cuatro tipos de variables: nominal, ordinal, intervalar, de razón.

Variables nominales

Una escala nominal es un sistema de clasificación que sitúa a personas, objetos u otras entidades dentro de categorías mutuamente excluyentes

Podemos usar símbolos (H/M, SI/NO) para representar las dos categorías.

Algunos programas de análisis de datos tratan sólo símbolos numéricos, por lo que es preferible esta representación. Puesto que las categorías pueden considerarse en cualquier orden cualquier conjunto de números será válido para su representación: 0/1, 1/2 (para no confundir ceros con blancos), 1/6 (para evitar errores de grabación).

Variables Ordinales

En este caso se usan categorías, pero existe un orden conocido entre ellas. Por ejemplo una escala de niveles de dureza de minerales, un nivel socioeconómico, etc. Puede usarse cualquier secuencia de números crecientes para su representación. Para definir una variable ordinal la operación básica es determinar si una observación es mayor que otra.

Variables de intervalo

Una variable intervalo es una variable ordinal especial, en la que las diferencias entre dos valores sucesivos es siempre la misma. Por ejemplo, la variable temperatura en grados Fahrenheit.

Variables de razón

Son variables de intervalo en las que además hay un punto natural representando el origen: punto cero. Por ejemplo, la altura.

Cualitativas y Cuantitativas:

Las variables ***cuantitativas*** son aquellas en la que los valores son números. Cuantifican características que unos poseen en mayor **cantidad** que otros:

$$Q \subset IR$$

En las ***cualitativas***, también llamadas categóricas o de clasificación, los diferentes valores representan **grupos** distintos a los que el sujeto puede pertenecer.

Ejemplo 1.3: $Q = \{verde, azul, negro, ...\}$ si X: Color de ojos.

Continuas y Discretas:

Una variable se dice ***continua*** si puede tomar cualquier valor en un rango específico. Por ejemplo, altura, peso, densidad, tiempo, resistencia.

Una variable que no es continua es ***discreta***. Puede tomar sólo ciertos valores específicos. Por ejemplo: número de hijos, sexo, identificación con partido político. A veces a las variables de este tipo se les denomina también *atributos*.

Esta última clasificación lleva, posteriormente, a considerar las posibles **distribuciones de las variables** que se suponen en los análisis. De esta forma una variable discreta puede seguir una distribución Binomial, de Poisson, etc., mientras que la distribución Normal se usa para describir la distribución de las variables continuas.

ENTRADA DE DATOS

NUMERO	SEXO	EDAD	EJERCICIO	ALCOHOL	TABACO	ALIM_GRA	COLEST	ANT_FAM	PROB COR
001	H	67	3	35	0	600	185	1	0
003	M	76	1	56	10	690	210	2	1
004	H	56	2	112	15	-1	195	1	1
005	M	63	4	67	25	650	200	2	0
006	H	55	1	-1	0	750	230	9	-1
Identif	**CUALI**	**CUANT**	**ORDINAL**					**CUALIT**	**CUALIT**

1. Nombres de las variables, nombres de códigos para descodificación

2. Codificar preferiblemente en números

3. Codificación detallada. Ejemplo: Edad, Tabaco con valor exacto.
   No intervalos que se pueden generar posteriormente.

4. Chequeo de rangos, máximos, mínimos.

5. Valores Missing: definición, codificación.
- Los análisis multivariantes requieren casos completos
- Valorar la supresión de un caso o una variable con alta proporción de valores missing

6. Copias de seguridad

7. Chequeo inicial: frecuencias, máximos y mínimos, gráficas, detectar valores no admisibles, inconsistentes, errores, etc.

PROBLEMAS TÍPICOS

1. Determinar las Unidades Experimentales o Unidades Muestrales
2. Homogeneidad respecto a otras características que puedan influir
3. Obtención de las medidas: Grandes errores

ORGANIZACIÓN MATRICIAL

En general, los datos a analizar consistirán de un conjunto de *p* variables medidas en *n* unidades muestrales.

Grabados en Hojas de cálculo (EXCEL, LOTUS), Bases de Datos (DBASE, ACCESS) o Programas Estadísticos (STATGRAPHICS, SPSS)

NUMERO	SEXO	EDAD	EJERCICIO	ALCOHOL	TABACO	…
001	H 67		3	35	0	
003	M 76		1	56	10	
004	H 56		2	112	15	
005	M 63		4	67	25	
…						

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Sea Ω una población finita (o subconjunto finito de una población mayor).

Considere $X : \Omega \to Q$

Como $Card\ \Omega = |\Omega| = n$, podemos asociar Ω con $\{1,2,3,\ldots n\}$.

Así, $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ son los valores de Q.

Preguntas:

¿Cómo están repartidos los valores $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$?

¿Dónde se concentran?

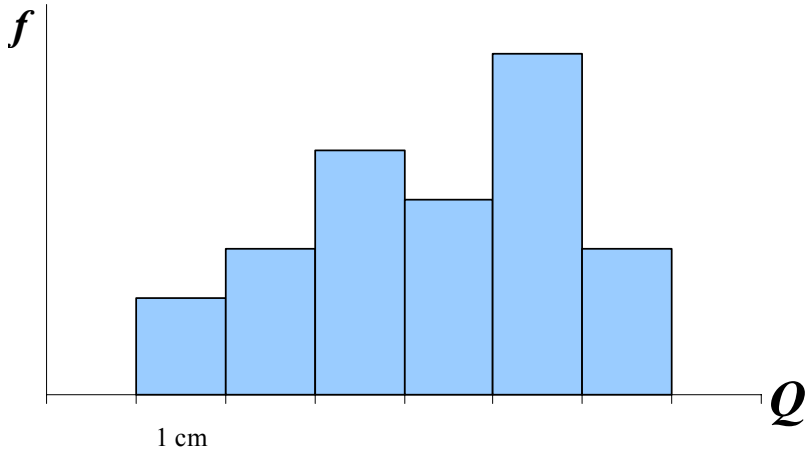
¿Cómo se dispersan?

Distribución de Frecuencias:

Sea $f: \begin{array}{l} Q \to IN^+ \\ q \to f(q) \end{array}$ con $f(q) = Card\{i \in \Omega / x_i = q\}$.

→ f se denomina la distribución de frecuencias de X.

Ejemplo 1.4: $Q = IR$, X: talla de alumnos de IN 3401.



- A partir de la distribución de frecuencias se construye el **histograma**

Por motivos prácticos Q se particiona en p clases (≡ intervalos):

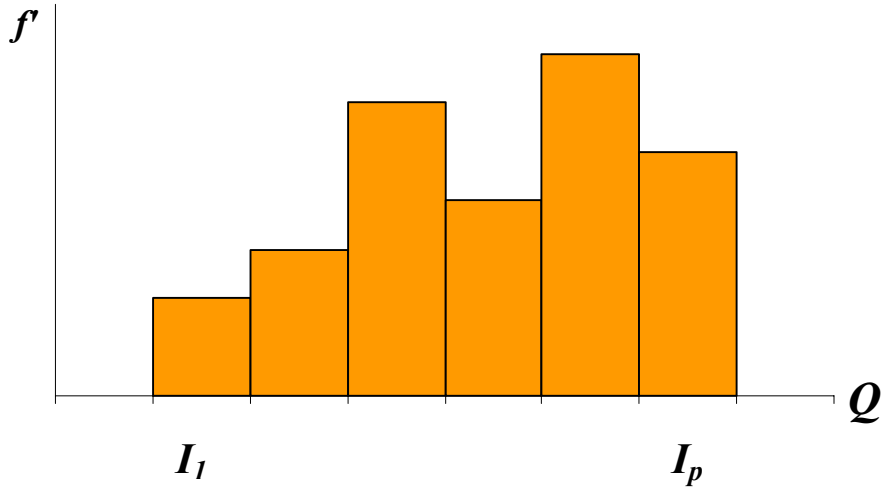
$$Q = \{I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_p\}$$

Si llamamos $Q' = \{I_1, I_2, ..., I_p\}$ y definimos $f': \begin{array}{l} Q' \to IN^+ \\ I_j \to f(I_j) \end{array}$ con

$$f'(I_j) = Card\{i \in \Omega / x_i \in I_j\}.$$

Observaciones:

- $f'(I_j) = \sum_{q \in I_j} f(q)$
- Al pasar de *f* a *f'* se pierde información. Se tiene aquí el compromiso entre perder información e interpretar mejor o tener mayor información pero poca claridad.



- El número de clases en una tabla de frecuencias es algo arbitrario.

- Por lo general una tabla de frecuencias debería tener entre 5 y 20 clases, donde se suele usar la siguiente regla:

$$2^c >= n$$

- Una vez que se establecen los límites de cada clase, se puede calcular el promedio (M) de las observaciones en cada nivel.

- Una vez que se cuenta con el número de clases deseadas, se utiliza la siguiente fórmula para determinar los intervalos entre clases:

$$IC = \frac{MAX - MIN}{C}$$

- Por razones de conveniencia se suelen utilizar intervalos de 10 o múltiplos

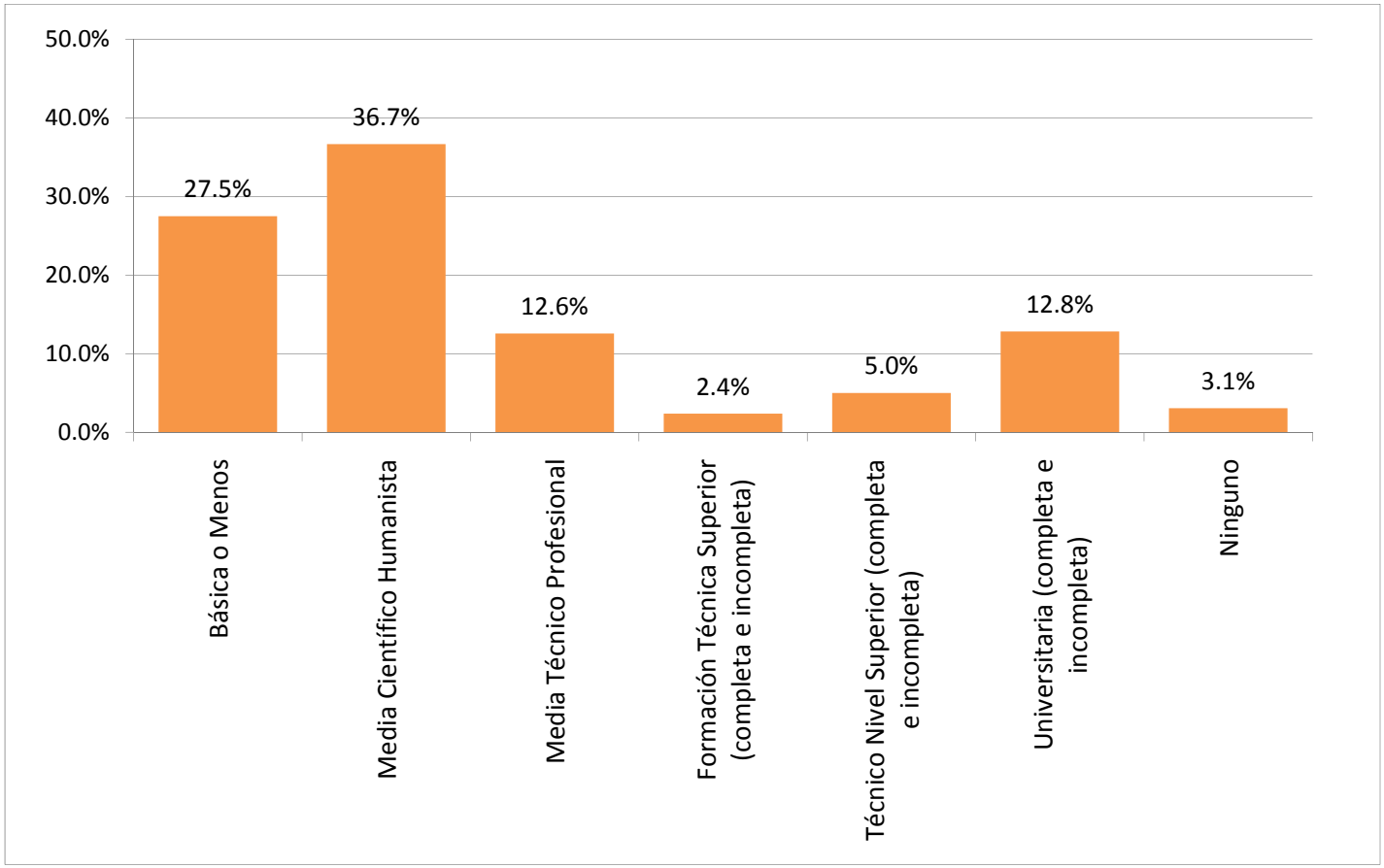
- La distribución de frecuencia *acumulada* va sumando los ejemplos hasta considerar el total en el último nivel (Ej. Datos sobre los pasajeros en vuelos de una aerolínea)

Clase (pasajeros)	Frecuencia acumulada (días)	Frecuencia (días)
Menos de 50	0	0
Menos de 60	3	3
Menos de 70	7	10
Menos de 80	18	28
Menos de 90	12	40
Menos de 100	8	48
Menos de 110	2	50

- La distribución de frecuencia relativa expresa la frecuencia dentro de una clase como un porcentaje del número total de observaciones.

Clase (pasajeros)	Frecuencia (días)	Frecuencia relativa
50-59	3	3 ÷ 50 = 6%
60-69	7	7 ÷ 50 = 14%
70-79	18	18 ÷ 50 = **36**%
80-89	12	12 ÷ 50 = 24%
90-99	8	8 ÷ 50 = 16%
100-109	2	2 ÷ 50 = 4%
	50	100%

- Notar que en variables categóricas no se tiene la separación en intervalos:



Características de la Distribución de Frecuencias:

a) Características de Posición Central

i. Media Aritmética: $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ii. Media Geométrica: $$g = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

Obs:

- La media geométrica proporciona una medida precisa de un cambio porcentual promedio de una serie de datos. Es útil en series económicas, por ejemplo la tasa de crecimiento promedio en los ingresos (para tomar decisiones como campañas publicitarias)
- $ln(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln(x_i)$

iii. Media Armónica: $$h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Estas tres medias se definen para variables cuantitativas.

iv. Mediana: Es el valor M en Q t.q. 50% de Ω toma valores menores que M y 50% toma valores mayores.

Obs: No siempre es única (puede ser un intervalo)

v. Moda: Es el valor M_d en Q t.q. $f(M_d)$ es mayor.

Obs: No siempre es única.

Ambas características son aplicables a toda clase de variables.

b) Valores Extremos

i. Mínimo: $x_m = Min\{x_i / i \in \Omega\}$

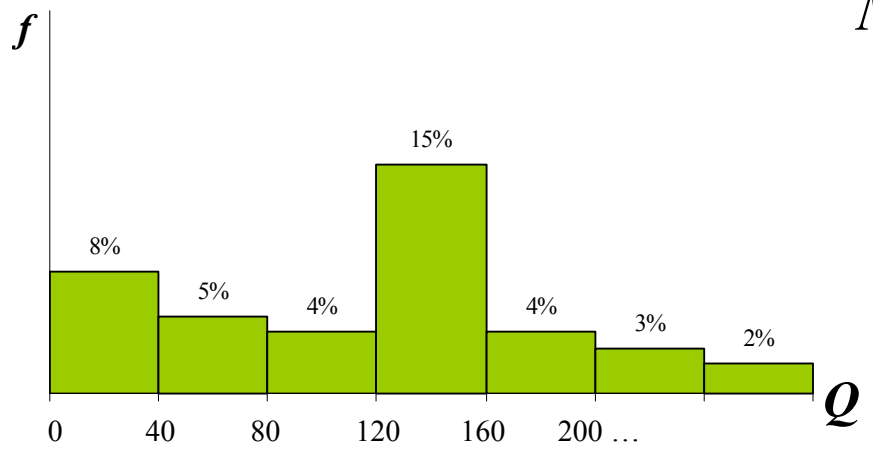
ii. Máximo: $x_M = Max\{x_i / i \in \Omega\}$

iii. Cuantila de orden α%: Es el valor C_α t.q. α% de Ω toma valores menores que C_α.

Obs: No siempre es única.
Si α=50 entonces $C_\alpha = M$

Ejemplos:

- $Q = [0,400]$ (US$)



$$M_d \in [120,160]$$

$$C_{10} \approx 60$$

- Cada conjunto de datos tiene tres *cuartiles* que lo dividen en cuatro partes iguales. El primer cuartil (inferior) cuenta con el 25% de las observaciones. El segundo es justo la mitad (50% de los datos) y el tercero el 25% superior.

- Los *deciles* separan el conjunto de datos en 10 subconjuntos iguales, y los *percentiles* en 100 partes.

- El lugar del *p*-ésimo percentil en un conjunto de *n* datos es: $L_p = (n+1)\frac{P}{100}$

c) *Características de Dispersión*

i. Varianza: $$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

ii. Desviación Típica: S

iii. Rango: $x_M - x_m$

Obs: Se puede considerar como una desventaja que considera sólo dos observaciones, ignorando el resto cualquiera sea.

iv. Intervalo Intercuantil: $C_\beta - C_\alpha$, $\alpha<\beta$.

Obs: Esta medida no está muy influenciada por observaciones extremas.
Ej. ¿Qué porcentaje de observaciones hay entre el primer y el tercer cuartil?

d) *Momentos*

Se define el *Momento de orden k*: $m_k = \sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k}$

Ejercicio:

Muestre que

- $m_0 = g$
- $m_1 = \bar{x}$
- $m_{-1} = h$
- $m_k \xrightarrow{k \to -\infty} x_m$
- $m_k \xrightarrow{k \to \infty} x_M$

Se define el *Momento de orden k centrado en a*: $m_k(a) = \sqrt[k]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^k}$

Observación:

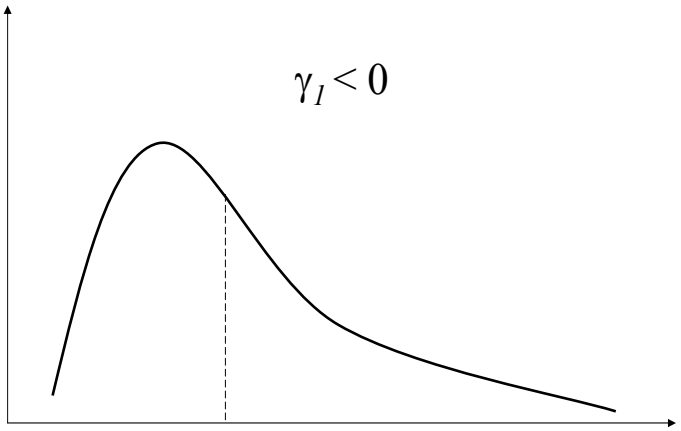
- $m_2(\bar{x}) = S$
- Se anota $\mu_k = m_k(\bar{x})$ al momento de orden k centrado en la media.

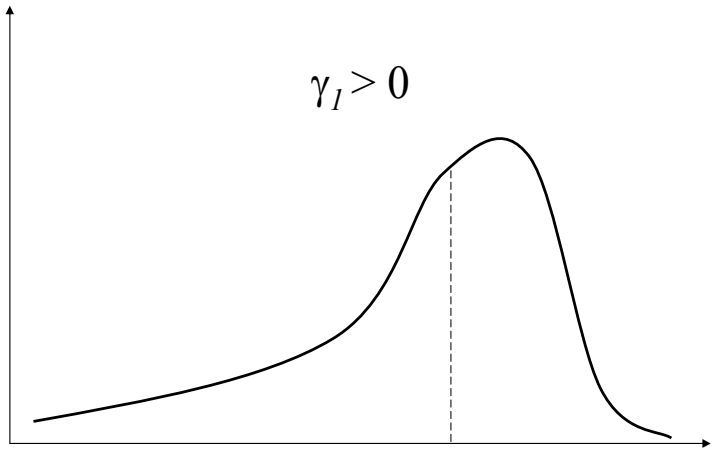
e) Características de Forma:

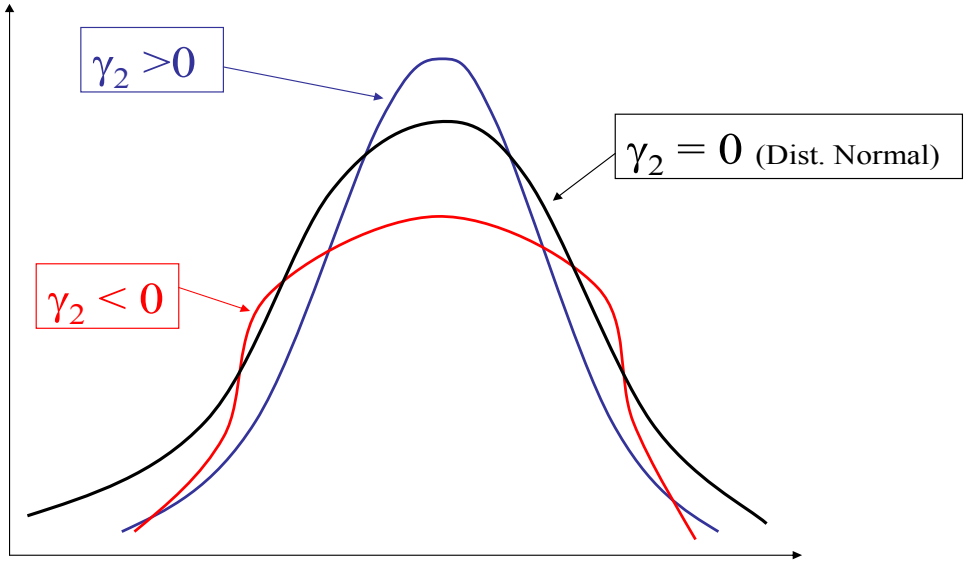
i. Coeficiente de Variación: $$CV = \frac{\mu_2}{\bar{x}} = \frac{S}{\bar{x}}$$

ii. Coeficiente de Asimetría: $$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{3/2}}$$

iii. Coeficiente de Achatamiento: $$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$


$\gamma_1 < 0$


$\gamma_1 > 0$


$\gamma_2 > 0$
$\gamma_2 = 0$ (Dist. Normal)
$\gamma_2 < 0$

Ejercicios:

Muestre que

- Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ entonces $CV = 0$
- Si la distribución de frecuencias es simétrica con respecto a $\bar{x}$ entonces $\gamma_1 = 0$
- Si los valores de X siguen una distribución normal entonces $\gamma_2 = 0$
- $S = m_2(\bar{x}) \leq m_2(c), \ \forall c \neq \bar{x}$

Observación:

- En ciertos casos se desea darle un mayor peso a algunas observaciones, por ejemplo, una prueba con mayor ponderación. Así, por ejemplo la fórmula de la *media ponderada* corresponde a:

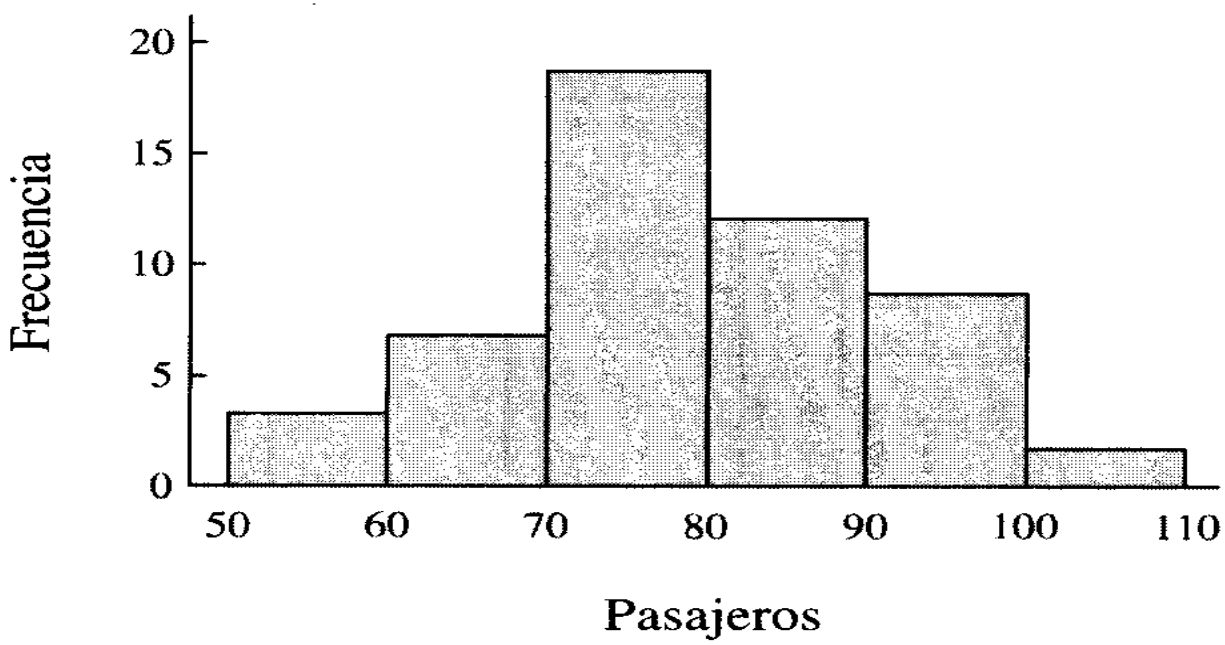
$$\bar{X}_w = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i X_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

Donde w_i es el peso o ponderación asignada a la observación *i*.

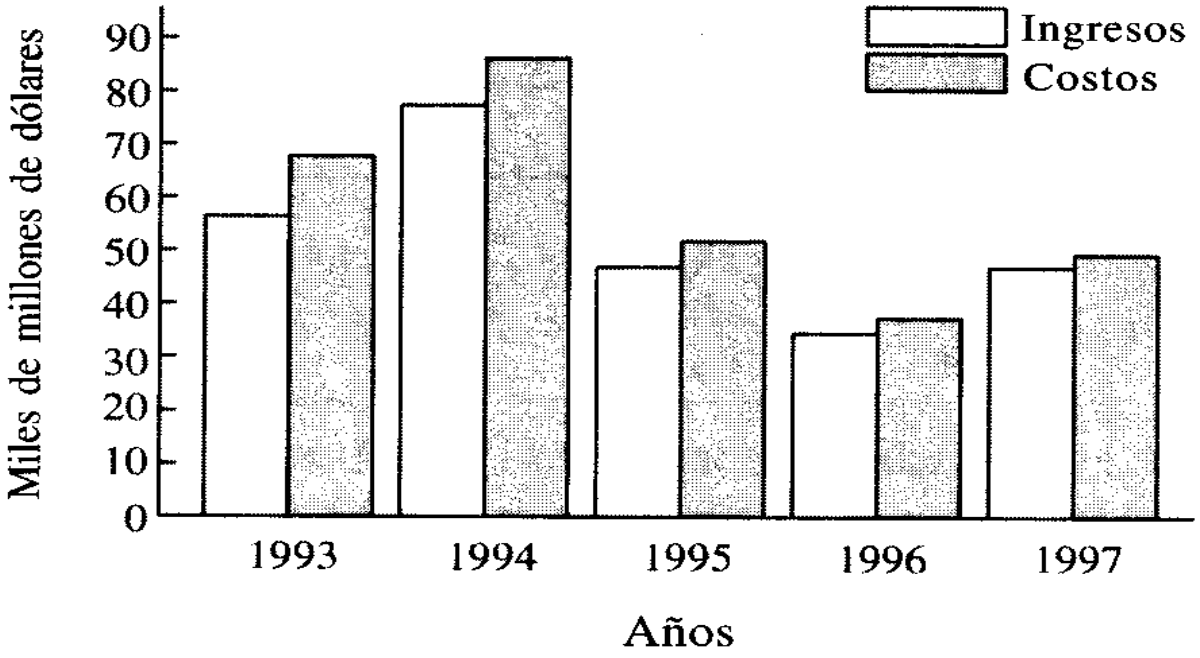
Visualizando Datos: Gráficos

- Son muy útiles para describir los datos y “entenderlos” de manera rápida.
- Existen gráficos de distribución para variables categóricas como el gráfico de barras, y para proporciones relativas (diagrama circular).
- El histograma es la alternativa al gráfico de barras en variables continuas.
- Otros gráficos más avanzados, como el diagrama de caja o boxplot, se verán más adelante

- El *histograma* ubica las clases de una distribución de frecuencia en el eje horizontal y las frecuencias en el eje vertical. Las frecuencias relativas se ilustran claramente:

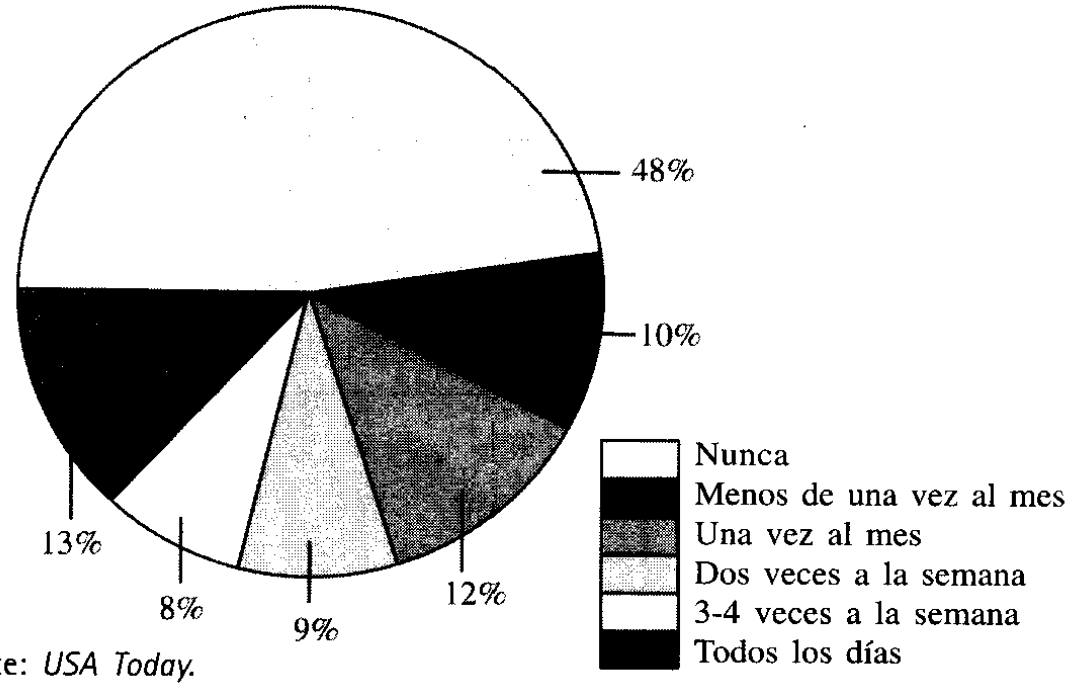


- El *gráfico de barras* en su versión más simple muestra categorías o valores numéricos (sin agrupar en clases) y cantidades de otra variable. Como ejemplo el desempeño de una empresa:



- El *diagrama circular* es de particular utilidad para mostrar porcentajes de una variable, donde cada categoría se representa como una porción del círculo.

Con qué frecuencia los trabajadores llevan trabajo para hacer en la casa



Fuente: *USA Today.*

PROBABILIDADES

Fenómenos y experimentos aleatorios

- En este curso, entenderemos *experimento* como la acción de medir una atributo o característica (*observar*) en un conjunto de objetos.

- Un experimento es *determinístico* cuando tiene una serie de circunstancias previas a su realización, que determinan completamente su resultado.

- Un experimento es *aleatorio* si no podemos predecir su resultado de antemano, pero:
  - Se conocen previamente y con exactitud los posibles resultados del experimento.
  - Es imposible saber su resultado antes de su realización.
  - Se puede repetir indefinidamente, en las mismas condiciones iniciales, obteniendo resultados distintos.

Espacio Muestral

- El *espacio muestral* es el conjunto Ω de todos los posibles resultados del experimento aleatorio.

  Ejemplo: Experimento, lanzar dado, Ω ={1,2,3,4,5,6}

- Un *evento* (o *suceso*) es cualquier subconjunto del espacio muestral.

- Un *evento elemental* es un elemento del espacio muestral.

  Ejemplo: (lanzar dado), “Sale un as”, A={1}

- Un *evento compuesto* es un conjunto de sucesos elementales.

  Ejemplo: (lanzar dado) “Sale un número impar”, B={1,3,5}

- El *evento seguro* es el que siempre ocurre al realizar el experimento, Ω.

  Ejemplo: (lanzar dado) "Un número entero entre 0 y 7"

- El *evento imposible* es el que nunca ocurre al realizar el experimento, ∅.

  Ejemplo: (lanzar dado) "Sale el número 0"

Ejercicio: Operaciones con Eventos

De una interpretación en términos de ocurrencia de resultados a los siguientes eventos en Ω:

- $A \cup B$
- $A \cap B$
- A^c
- $A \backslash B$
- $A \cap B = \emptyset$

Definición de Probabilidad

Una *probabilidad* es una función real $P:\Omega \rightarrow [0,1]$ tal que:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) \geq 0$
3. Si $A_1, A_2, \ldots$ son tales que $A_i \cap A_j, \forall\, i \neq j$, entonces $P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

a) Algunas propiedades

- Propiedad 1. $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Propiedad 2. $P(\emptyset) = 0$
- Propiedad 3. Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$
- Propiedad 4. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
- Propiedad 5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) Independencia

- Dos sucesos A,B son independientes ssi:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

c) Nociones de probabilidad…en la práctica

- Regla de Laplace (*Equiprobabilidad*):

  Si el experimento tiene un número finito de resultados posibles y no hay razón que privilegie un resultado frente a otro, para cualquier A se tiene:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables al evento A}}{\text{Número total de posibles resultados}}$$

- Noción frecuentista:

  Si llevamos a cabo el experimento una cantidad muy grande de veces, digamos $N \gg 1$, entonces

$$P(A) = \frac{\text{Número de veces en que ocurre el evento A}}{N}$$

d) Probabilidad Condicional

- *P(A/B)* es la probabilidad de que ocurra el evento A, dado que el evento B ya haya ocurrido.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo:

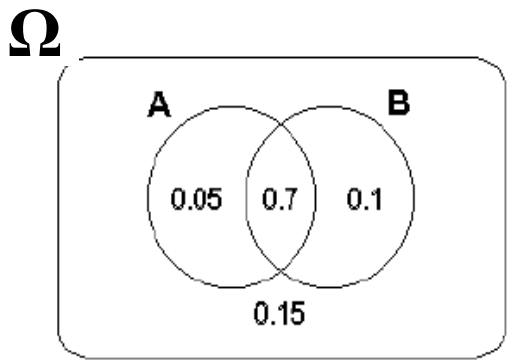
En IN3401

80% de los alumnos estudió para el examen
75% de los alumnos aprobó el examen
15% de los alumnos no estudió para el examen y no aprobó.

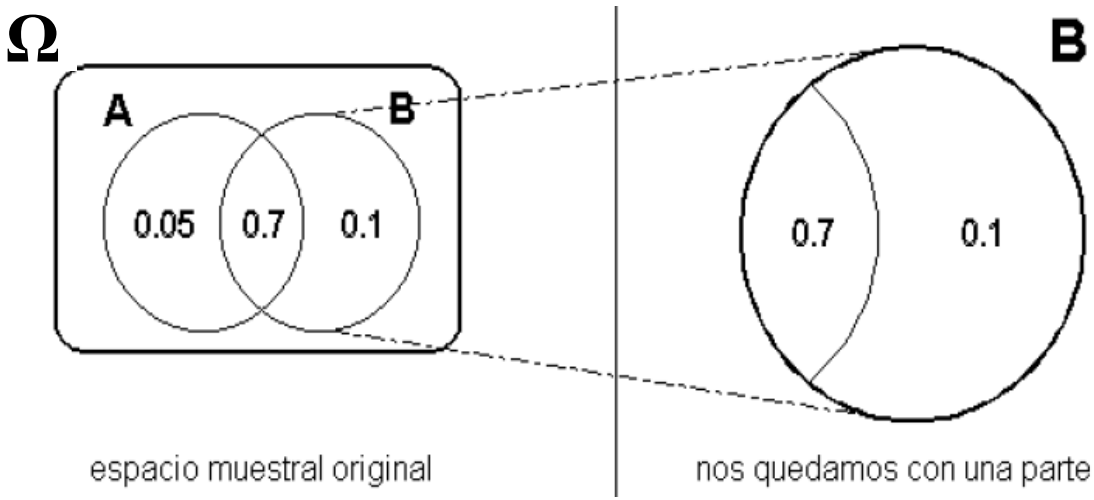
Sea A el suceso "alumno aprobó examen" y B el suceso "el alumno estudió".
¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen si se ha estudiado?

Intuitivamente. Los alumnos que estudiaron fueron el 80%. Ese 80% está formado por un 70% que aprobó y un 10% que no aprobó. La probabilidad de aprobar es 70/80=0,88

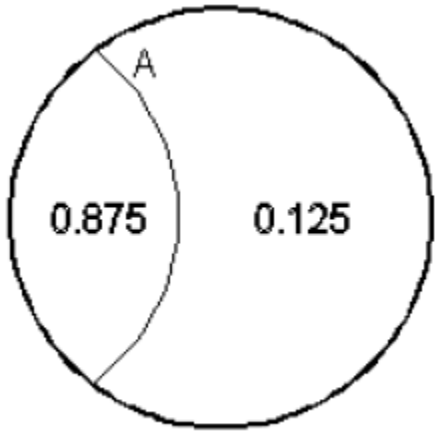
- Gráficamente:



- P(A|B) es la probabilidad de “cuantificar A, sabiendo que estamos en B".



- Sin embargo, B no es un espacio muestral (probabilidades no suman 1)
- Es necesario dividir las probabilidades en B por un factor, para que sea EM manteniendo la proporción relativa.
- Como las probabilidades en B suman P(B), basta dividir por este factor



el nuevo espacio muestral

Ejercicio: Resuelva formalmente.

e) Principio de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Note que A y B son independientes si :
  - ✓ $P(A|B) = P(A)$
  - ✓ $P(B|A) = P(B)$

f) Probabilidades Totales

- Sea $\{A_i\}_{i\in I}, I \subseteq \mathbb{N}$, una partición de Ω, es decir:
  - ✓ $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
  - ✓ $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$

Entonces

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)\,P(A_i) \quad \forall B$$

g) Regla de Bayes (Probabilidades a Posteriori)

- Sea $\{A_i\}_{i\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, una partición de Ω, entonces:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j\in I} P(B|A_j)\,P(A_j)} \quad \forall B$$

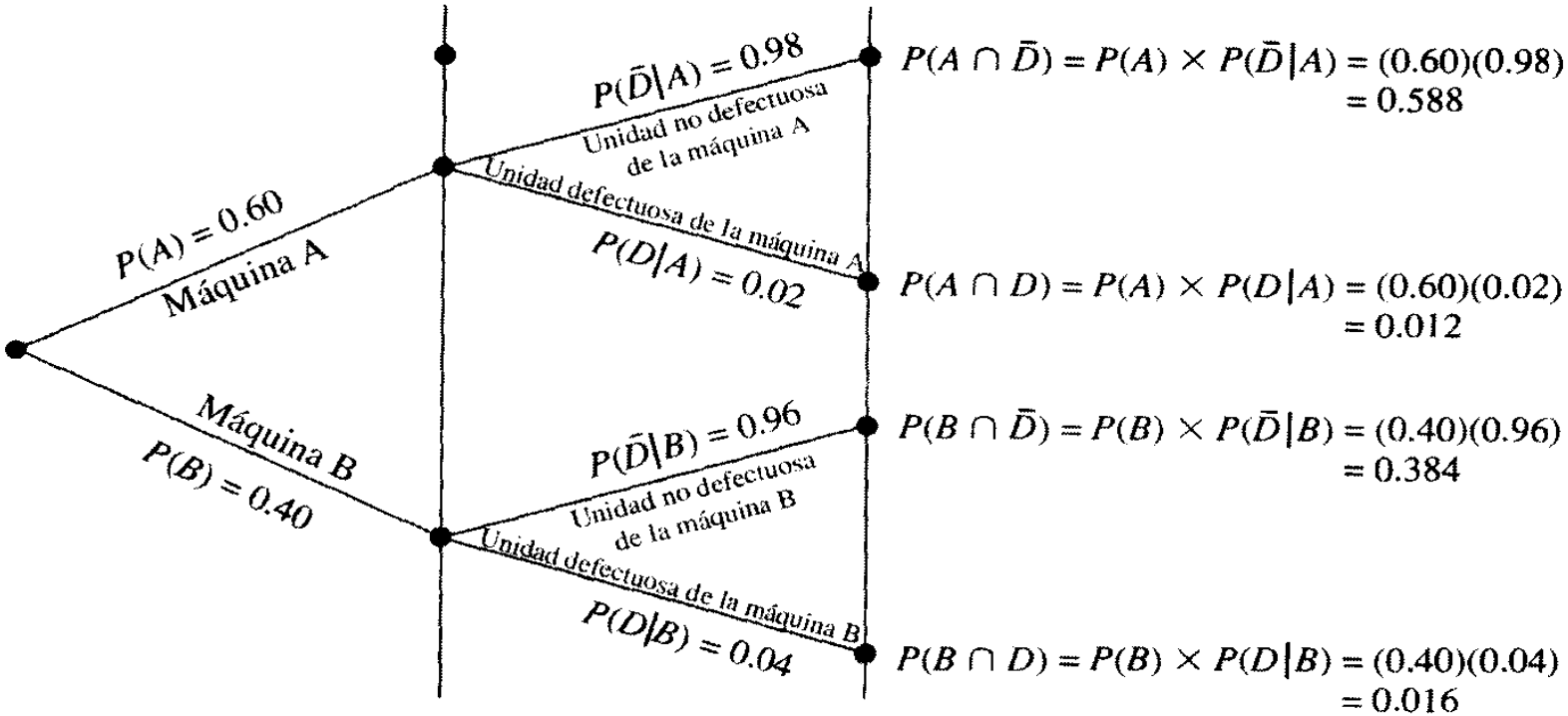
Ejemplo:

En una empresa manufacturera, una máquina A produce el 60% de la producción total, mientras que una máquina B el restante 40%.

El 2% de las unidades producidas por A son defectuosas, mientras que B tiene una tasa de defectos del 4%.

Se cuenta con una unidad defectuosa, se desea conocer la probabilidad de que venga de la máquina A.

- Árbol de resultados:



- Entonces, por la regla de Bayes:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)}$$

VARIABLES ALEATORIAS
Y DISTRIBUCIONES

VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES

Consideremos $X : \Omega \to IR$ y anotemos $[X \in B] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\}$ donde $B \subset IR$.

Observación:

- $[X \leq x] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$
- $[X = x] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\}$

Variable Aleatoria: una v.a. X es una función real definida en Ω (es decir $X : \Omega \to IR$) tal que $[X \leq x]$ es un evento aleatorio $\forall x \in IR$.

X es una v.a. si se puede asignar una probabilidad al evento $[X \leq x]$, $\forall x \in IR$.

Función Distribución: Se llama función de distribución de una v.a. X a la función real $F_X(x) = IP(X \leq x) \ \forall x \in IR$.

Observación:

- F_X también es llamada *función de distribución acumulada de* X.
- F_X es continua sii $IP(X = x) = P_X(x) = 0, \forall x \in IR$.

Tipos de Variables Aleatorias:

a. ***Discreta:*** una v.a. X es *discreta* si toma un número finito o numerable de valores, es decir si existe $\{x_1, x_2, ...\} \subset IR$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, ...\}, \ \forall \omega \in \Omega$.

Notemos que si X es una v.a. discreta $F_X(x) = \sum_{i / x_i \leq x} P_X(x_i), \ \forall x \in IR$.

b. ***Absolutamente Continua:*** una v.a. X es *absolutamente continua* si existe una función real f_X tal que

- $f_X(x) \geq 0, \ \forall x \in IR$.
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \ \forall x \in IR$

Se llama a f_X *función densidad* (o densidad) de X.

Distribución (o Ley) de una v.a.: Se llama *distribución* de una v.a. X a la probabilidad definida por $P_X(B) = IP(X \in B)$, $\forall B$ evento aleatorio en IR

- Si X es una v.a. discreta $P_X(x) = \sum_{i/x_i \in B} P_X(x_i)$.
- Si X es una v.a. abs. continua $P_X(B) = \int_B f_X(t)dt$.

- La distribución de una v.a. X está determinada por cualquiera de las siguientes funciones, denominadas *representaciones* de la ley de X:

i. La función de distribución F_X
ii. La densidad f_X, si X es abs. continua
iii. La función de probabilidad P_X, si X es discreta
iv. La función característica φ_X

Ejercicio: ¿Cuál es la definición de φ_X?

Ejemplo 1.6:

1) $X \sim N(0,1)$ sii $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in IR$

2) $X \sim Bernoulli(p)$ sii $IP(X=1) = p; IP(X=0) = 1-p.$

3) $X \sim Binomial(n,p)$ sii $P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,...,n.$

Ejercicio:

Muestre que si $X_1, X_2, ..., X_n$ son v.a. i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) *Bernoulli(p),* entonces $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binomial(n,p).$

Valor Esperado de una v.a.: Se llama valor esperado (o *esperanza)* de una v.a. X que toma valores en Q, al número

- $IE(X) = \sum_{x_i \in Q} x_i P_X(x_i)$, si X es discreta (Q finito o numerable).
- $IE(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$, si X es abs. continua.

Ejercicio:

- $X \sim Exp(\lambda)$ sii $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$. Pruebe que $IE(X) = 1/\lambda$.
- $X \sim Cauchy$ sii $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in IR$. Pruebe que $IE(X)$ no existe.

Varianza una v.a.: Se llama *varianza* de una v.a. X que toma valores en Q, al número

$$V(X) = IE(X - IE(X))^2 = IE(X^2) - IE(X)^2$$

La varianza corresponde a una medida de dispersión de la distribución de X con respecto a su esperanza, por ello se denomina también *desviación cuadrática media.*

Observaciones:

- Se nota $V(X) = Var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2(X)$
- A la raíz cuadrada de la varianza se llama *desviación estándar* $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Ejercicio:

- Pruebe que $V(X) = 0$ sii existe una constante c tal que $IP(X = c) = 1$.
- Pruebe que cualquiera sean a y b constantes, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE, LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS Y DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEFF

Consideremos $X_1, X_2, ..., X_n$ son v.a. i.i.d. (una *muestra aleatoria*).

Desigualdad de Tchebycheff: Sea $T : IR^n \to IR$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$:

$$IP(|T(X_1, X_2, ..., X_n) - IE(T(X_1, X_2, ..., X_n))| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T(X_1, X_2, ..., X_n))}{\varepsilon^2}$$

En particular si $T(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \equiv \overline{X_n}$ (la *media muestral*),

entonces $IP(|\overline{X_n} - IE(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}$.

Ley de los Grandes Números: $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} IE(X).$

La media muestral converge casi seguramente a la media poblacional.

Teorema Central de Límite:

$$\frac{\overline{X}_n - IE(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - IE(X))}{\sqrt{V(X)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1)$$

La media muestral (estandarizada) converge en distribución a una normal.

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Se formulan hipótesis acerca de leyes o fenómenos físicos o naturales, que es necesario demostrar o rechazar por medio de "contrastes" (tests) o "pruebas". La prueba de la hipótesis es el Contraste de Hipótesis que nos llevará a su aceptación o rechazo.

El procedimiento estándar consiste en recopilar información en forma de observaciones numéricas que serán la base de nuestra decisión.

Por ejemplo si tiramos una moneda 100 veces y obtenemos siempre cara podemos percibir que la hipótesis de que la moneda no está trucada no es aceptable. Sin embargo es posible obtener este resultado con una moneda no trucada, por consiguiente no podremos estar completamente seguros de nuestra decisión.

Los procedimientos de Inferencia Estadística nos posibilitan, bajo ciertas condiciones, establecer la probabilidad de aceptar hipótesis falsas o rechazar hipótesis verdaderas. Es decir permiten calcular la probabilidad de cometer error con nuestra decisión.

El objetivo de un contraste de hipótesis es comprobar si los datos muestrales apoyan la hipótesis nula, o por el contrario rechazan H_0, lo cual nos llevaría a aceptar H_1.

En un enfoque totalmente práctico hay que tener en cuenta dos cosas:

a) La hipótesis nula que se contrasta

b) El *p*-valor obtenido.

Se puede interpretar el *p*-valor de dos formas:

i. La probabilidad de error (o sea de equivocarse) si se rechaza la hipótesis nula cuando realmente es cierta. Es el error llamado de Tipo I.

ii. La probabilidad de que las diferencias observadas sean debidas al azar.

Por ese motivo se rechaza la hipótesis nula cuando el *p*-valor es pequeño. El valor fijo a partir del cual el p-valor se considera pequeño es el nivel de significación a (0.10, 0.05, 0.01, 0.001).