SOLUCIÓN AUXILIAR 1 GF3003 SEM. OTOÑO 2010

1. Usando las ecuaciones hidrostática y de gases ideales:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \ \ y \ \ P = \rho RT$$

La variación de la temperatura con la altura, para alturas menores a 10 kilómetros se obtiene con la siguiente relación:

$T = T_0$ - 0,0065 z= T_0 +γz (T en ºK y z en metros)

Notar que γ se define como $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$, porque en general el gradiente de temperatura troposférico es negativo, de modo que gamma es positivo (e igual a 0.0065 en este caso) Se despeja la densidad de la ecuación de G. I. y se reemplaza en la ec. Hidrostática, se tiene:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = g\,\frac{P}{RT}$$

Usando el perfil de temperatura del enunciado: (γ=0.0065)

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{g}{R}\frac{P}{(\mathrm{T}_0 - \gamma \mathrm{z})}$$

Integrando la expresión anterior, considerando P_0 a nivel del mar (z = 0), se tiene:

$$ln\left({}^{P}/_{P_0}\right) = -\frac{g}{R}\left[\frac{ln(\mathrm{T}_0 - \gamma \mathrm{z})}{-\gamma}\right]_0^z$$

$$P(z) = P_0\left(\frac{\mathrm{T}_0 - \gamma \mathrm{z}}{\mathrm{T}_0}\right)^{g/_{R\gamma}}$$

Recordar que T siempre se usa en Kelvin, R es la constante del aire seco, igual a 287 J/(mol*Kg*K), y gamma siempre en K/m.

a) A que altura se alcanzará la mitad (50%), el 75%, el 99%, el 99,9% de la masa atmosférica en una atmósfera estándar. Suponga que la aceleración de gravedad permanece invariable con la altura (g = 9.8 m s-2).

Despejando z(P) de la ecuación de la parte anterior:

$$z(P) = \frac{T_0}{\gamma}\left(1 - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}\right)^{-g/_{R\gamma}}$$

Cuando se está a nivel del mar, es decir con Po, la masa de la atmósfera corresponde al 0 % de la masa atmosférica. Cuando la presión se ha reducido a la mitad, se tiene la altura en la cual se encuentra el 50 % de la atmósfera. Despejando encontrada para $P=0.5P_0$, $P=0.25\ P_0$, $P=0.01\ P_0$, y $P=0.001P_0$, en orden respectivo para las masas indicadas, se tiene:

Altura	Masa
[m]	%
5500	50.2
10250	74.9
26000	99
32000	99.9

b) Calcule la altura de la torre ENTEL sabiendo que su base esta a 540 m s.n.m.m. Al subir la presión atmosférica en la base es de 960 hPa con una temperatura de 20°C y en su tope esos valores cambian a 952 hPa y 18°C, respectivamente. Señale todas las suposiciones que haga en el cálculo.

En la ecuación (suponemos G.I. e hidrostaticidad):

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)^{g/R\gamma}$$

Si la altura de la torre entel es h, entonces el el valor de γ es $\gamma = -\frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{2}{h}$ (perfil lineal de T). Aquí usar el valor de gamma calculado con atmósfera estándar es poco exacto, para eso están los datos de presión. Despejamos con los datos (ponemos la presión P_0 de referencia en la base de la torre entel, y z=0 en la base) aplicando la ecuación para P(z=h):

$$952 = 960\left(\frac{T_0 - \frac{2}{h}h}{T_0}\right)^{g/R\frac{2}{h}} = 960\left(\frac{291}{293}\right)^{9.8/287\frac{2}{h}}$$

Se obtiene, despejando h:

$$h = \frac{9.8}{574}\frac{\ln\left({}^{291}/_{193}\right)}{\ln\left({}^{952}/_{960}\right)} \approx 68\,m$$

2. a) Calcule la altura que tendría una atmósfera cuya densidad no varía con la altura, con un valor igual a la densidad para z = 0 (ρ0) en una atmósfera estándar (ver Problema 1).

$$\rho = \rho_0 = cte$$
$$h = \frac{P_0}{\rho_0 \cdot g} \qquad \Rightarrow h = 8.42km$$

b) Calcule la escala de altura que tendría una atmósfera isotérmica con una temperatura igual a la de una atmósfera estándar para z = 0 (ver Problema 1).

$$-\partial p/\partial z = g\frac{P}{RT} \qquad \Rightarrow ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{g \cdot z}{RT_0}$$