FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 3 - Mecánica Estadística

Duración: 1:30 hrs.
Fecha 18 de Noviembre a las 12:00

Prof. Álvaro Núñez

1. Distribuciones Cuánticas

Discuta cuidadosamente los limites en que el efecto de la estadística cuántica de las partículas en las funciones de ocupación bosónica y fermiónica se hace (1) despreciables (límite clásico) y (2) dominantes (límite cuántico o degenerado)

2. El principio variacional de Bogoliubov

El cálculo exacto de la función partición (o de la energía libre de Helmholtz) es un problema insoluble, salvo en ejemplos muy específicos. En este problema usted demostrará un principio variacional muy útil en la construcción de modelos y aproximaciones. Consideremos un Hamiltoniano arbitrario $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, separado en dos contribuciones. Una parte, $\mathcal{H}_0$, es soluble (i.e. cuya función partición, $\mathcal{Z}_0$, y cuya energía libre F_0 pueden ser evaluadas). La segunda parte, $\mathcal{H}_1$ hace el problema de calcular $\mathcal{Z}$ y F para $\mathcal{H}$ insoluble. Demostraremos la desigualdad de Bogoliubov, que establece que si evaluamos el promedio de la energía $\mathcal{H}_1$ con respecto a $\mathcal{H}_0$:

$$F \leq F_0 + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_0 \tag{1}$$

1. Considere el Hamiltoniano $\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1$. Muestre que la energía libre de este Hamiltoniano, $F(\lambda)$ satisface:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda} = \langle \mathcal{H}_1 \rangle \qquad \text{y,} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\beta \langle \mathcal{H}_1 - \langle \mathcal{H}_1 \rangle \rangle^2 \tag{2}$$

   donde los promedios están referidos al ensemble canónico para el Hamiltoniano $\mathcal{H}(\lambda)$.

2. Concluya que $F(\lambda)$ es concava y argumente geométricamente que:

$$F(\lambda) \leq F(\lambda = 0) + \lambda \left. \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda} \right|_{\lambda=0} \tag{3}$$

   y concluya la desigualdad de Bogoliubov.

3. Interprete físicamente la desigualdad.

3. BEC en gases atrapados

Considere un gas de átomos bosónicos (e.g. ^{87}Rb) suficientemente diluido, de modo que la aproximación de *no interactuantes* es razonablemente precisa, y además, sujetos al potencial de confinamiento:

$$V_{\text{ext}}(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega_x x^2 + \frac{1}{2}m\omega_y y^2 + \frac{1}{2}m\omega_z z^2. \tag{4}$$

con niveles de energía trivialmente dados por:

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_z \tag{5}$$

Demuestre que la temperatura de condensación de Bose-Einstein en este sistema depende del número de átomos (N):

$$T_c^{(0)} = \alpha\ \hbar\omega_0\ \sqrt[3]{N} \tag{6}$$

donde α es un número (no necesita evaluarlo pero es $\approx 0{,}94$) y $\omega_0 = \sqrt[3]{\omega_x\omega_y\omega_z}$. Demuestre adicionalmente que, para $T < T_c^{(0)}$, la fracción de átomos que forma parte del condensado es:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c^{(0)}}\right)^3. \tag{7}$$

4. Calor específico del Grafeno

El grafeno esta constituido por átomos de carbono en un arreglo bidimensional. Desde un punto de vista práctico el grafeno es de gran interés actual. Tras su sintetización (mediante el procedimiento de exfoliación a partir del grafito) sus propiedades eléctricas han sido estudiadas (Nature **438**, 197 (2005)) y promete ser un protagonista en el futuro de la electrónica. Entre otras características interesantes, esta el hecho que las excitaciones de baja energía se comportan como partículas fermionicas sin masa. Obedecen el espectro de energías de neutrinos obedeciendo la ecuación de Dirac, i.e.

$$\varepsilon(k) = \pm c_{\text{eff}}|k| \tag{8}$$

donde $c_{\text{eff}} \approx 10^6$ m/s es una velocidad efectiva que depende de los enlaces atómicos entre carbonos.

1. En el caso en que $T = 0$ todos los estados de energía negativa se encuentran ocupados y todos los con energía positiva vacíos. Determine $\mu(T)$.
2. Encuentre una expresión integral para la energía de excitación térmica $E(T) - E(0)$ por unidad de área.
3. ¿Cual es la densidad de estados para este sistema?
4. Evalúe la integral y determine el calor específico c_A de los electrones en el grafeno.