Mecanica estadistica

Auxiliar 2

Prof: Alvaro Nuñez, Aux: Javier Baeza Ormeño

1. Cristal casi perfecto

Si n atomos de un cristal formado por N atomos ($1 << n << N$) son desplazados de los sitios interiores de la malla cristalina a los sitios de la malla en la superficie, se vuelve imperfecto. Si w es la energia necesaria para desplazar un atomo desde dentro de la superficie, muestre que en el estado de equilibrio a temperatura T, si se satisface que $w >> kT$ se tiene
$\frac{n}{N+n} = e^{\frac{-w}{kT}}$

2. Cadena Unidimensional

Tenemos una cadena unidimensional (que se envuelve en una linea, pero cada siguiente eslabon puede estar orientado hacia la derecha o hacia la izquierda en la misma linea) con n1 elementos. Entontrar la entropia de la cadena como funcion del largo x (diferencia entre los extremos de la cadena) y obtener la relacion entre la temperatura de la cadena y la fuerza de tension que es necesaria para mantener la distancia x, asumiendo que los segmentos de la cadena se doblan libremente.

3. Osciladores Cuanticos

Un oscilador cuantico de frecuencia ν tiene niveles de energia dados por $\epsilon_n = (n + 1/2)h\nu$.
Un sistema con N osciladores casi independientes tiene energia total $E = \frac{1}{2}Nh\nu + Mh\nu$ con M un entero.
(i) Encontrar Ω.
(ii) determinar la relacion entre la temperatura del sistema y E.

3.1. desarrollo

(i) como la energia del sistema esta expresada de esta forma, y sumando la energia de cada oscilador ϵ_i para $i = 1..N$, tenemos que:

$M = n_1 + n_2 + ... + n_N$ con n_i el nivel de energia del i-esimo oscilador.
Como al final debemos repartir M niveles en N osciladores, pensaremos en el problema de repartir M esferas entre N recipientes. De esta forma, podemos pensar que todas las maneras de repartir las esferas dependeran de cuantos recipientes tengamos. Este problema, asu vez se ve traducido a un problema de ordenar $M + N - 1$ caracteres, si pensamos que la division entre un recipiente y el siguiente es un caracter especial (— por ejemplo) y que un recipiente este vacio se representaria por dos de estos simbolos seguidos. Como no importan las permutaciones entre simbolos iguales (esferas o —) entonces obtenemos que::
$\Omega = \frac{M+N-1}{M!(N-1)!}$

(ii) Recuperamos el resultado que hace relacion con la entropia obtenido por Boltzmann y utilizando la aproximacion de Stirling tenemos que:
$S = k \log \Omega = k((M + N) \log M + N - M \log M - N \log N)$
Para obtener una relacion con la temperatura utilizamos que :
$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$
$\frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial E} = k \log \frac{M+N}{M} \frac{\partial M}{\partial E} = \frac{k}{h\nu} \log \frac{M+N}{M}$
$\frac{1}{T} = k \log \frac{E/N+1/2h\nu}{E/N-1/2h\nu}$
finalmente, despejando E:
$E = N(1/2h\nu + \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1})$
con lo que obtenemos la relacion pedida.