Mecanica estadistica

Auxiliar 1

Prof: Alvaro Nuñez, Aux: Javier Baeza Ormeño

1. Problemas de Estadistica

1.1. A.- Cumpleaños

¿Cual es la probabilidad de que al menos dos personas de un grupo de N hayan nacido el mismo dia del año? (Considere 365 dias en un año). ¿Cual es el N tal que la probabilidad de que esto ocurra sea de 0.5?.

1.2. B.- La ruleta rusa

Dos personas deciden jugar a la ruleta rusa (con un revolver convencional con 6 agujeros con una sola bala en ellos). En cada ronda, cada jugador mueve el barril con la bala de modo de no saber donde se encuentra, y dispara. ¿cual es la probabilidad de que el primer jugador pierda en la n-esima ronda? ¿y de que pierda el segundo jugador?.

1.3. C.- El Concurso

En un programa de concursos, el participante debe elegir entre dos sobres, donde uno de ellos contiene el doble de dinero que el otro, sin saber cual de los dos es. Una vez elegido, el concursante abre el sobre y escubre que hay $\$A$ dinero en el. En ese momento el jugador puede decir entre quedarse con el sobre o cambiarlo. Uno de ellos realiza el siguiente razonamiento:

> Si tengo el sobre con menos cantidad de dinero, el otro tiene $\$2 * A$, con probabilidad 0,5. Si tengo el sobre con mayor cantidad, entonces el otro sobre tiene $\$0{,}5 * A$ con probabilidad 0,5. Por cuanto la esperanza de cambiar el sobre es de $0{,}5 * 2 * A + 0{,}5 * 0{,}5 * A = 5/4 * A$ por cuanto me conviene cambiar este sobre por el otro.

¿Que puede decir de su razonamiento? ¿porque no depende de la cantidad A (es decir, siempre se cambia el sobre)?

hint: revise el concepto de esperanza y todo el concurso.

2. Random Walk

Consideramos el problema de un borracho que camina con pasos de l cada τ segundos, en forma aleatoria sobre un camino unidimensional. Puede dar el paso hacia la derecha o la izquierda con probabilidad 0,5. En este problema parte desde el origen del sistema, y a una distancia M hay una pared inflanqueable para el borracho, de modo que si se topa con ella no le queda mas opcion que devolverse. ¿Cual es la probabilidad de encontrarlo en la posicion i para un tiempo grande?.

¿A que condicion de borde para la ecuacion de difusion corresponde la pared inflanqueable?.

2.1. desarrollo

Si consideramos el problema sin la pared, todo el espacio es alcanzable por el borracho, pero en el caso de la pared el espacio posible esta restringido por la pared. Por cuanto, cada camino que en el primer caso llevaba hasta una posicion mas alla de la pared ahora esta obligado a cambiar su destino.

Si al momento de tomar la decision de hacia donde moverse en la posicion M el camino que antes podia tomar hacia la derecha ahora esta restringido a moverse hacia la izquierda. De este modo, si llevaba a la posicion $2M-i$ ahora lleva a la posicion i (si este resultado parece extraño, recomiendo realizar el diagrama con algun camino antes y despues de la pared, donde resulta que i y $2M-i$ estan a la misma distancia de la pared en M).

De modo que la nueva probabidad de la posicion i-esima corresponde a la suma de los caminos que llevaban a la posicion i-esima sin la pared mas la suma de los caminos que llevaban a la posicion $2M-i$ sin pared normaizada por la suma de todos los caminos posibles. Como ya resolvimos este problema en clase de catedra, con las probabilidades normalizadas para todo el espacio, utilizamos este resultado para construir la nueva probabilidad.

$P_{conpared}(i,n) = P_{sinpared}(i,n) + P_{sinpared}(2M-i,n)$
con $P_{sinpared}(i,n) = (\frac{1}{2})^n \frac{n!}{I!D!}$
donde I y D son los pasos que da hacia la izquierda y derecha respectivamente.

Se aproximo la solucion a la ecuacion de recurrencia y los factoriales aproximados por Stirling, de modo que:
$P_{sinpared}(i,n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-i/2n}$
luego
$P_{conpared}(i,n) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-i^2/2n} + \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-(2m-i)^2/2n}$

El paso natural es pensar en un tiempo continuo y pasos continuos, de modo que

$P_{conpared}(x,t) = \sqrt{\frac{2\tau}{\pi l^2 t}} e^{-l^2/\tau x^2/2t} + \sqrt{\frac{2}{\pi l^2 n}} e^{-l^2/\tau(2\delta - x)^2/2t}$
con $delta * l = M$. El factor de normalizacion l^2 que aparece en la raiz es debido a que es necesario renormalizar la probabilidad en todo el espacio (queda como ejercicio, recordar que $P_{conpared}(x,t) = 0, \forall x > \delta$).

Para poder responder la segunda pregunta, debemos comprobar si $\frac{dP}{dx} = 0$ o $P(\delta) = 0$ en $x = \delta$, que son las dos condiciones de borde para ecuaciones de segunda derivada. La segunda es facil de descartar, pues hay al menos un camino que deja al borracho en la pared en el tiempo n (puede quedarse cerca de la pared de modo de cumplirlo).

Luego, solo resta comprobar que $\frac{dP}{dx} = 0$ en $x = \delta$. (queda como ejercicio)