Apuntes de Física Moderna: Relatividad Especial

Gonzalo Palma

(Apuntes en construcción)

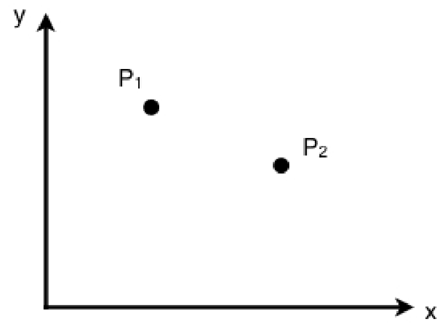
1 Principios relativistas

Comenzaremos nuestro estudio estableciendo los principios básicos tras la formulación introducida por Einstein acerca del espacio y del tiempo (o simplemente espacio-tiempo). Primero, desarrollemos algunos conceptos elementales que ciertamente ya nos son familiares, pero que nos serán tremendamente útiles.

1.1 Sistemas de referencias

Partamos considerando, por simplicidad, un espacio Euclidiano de dos dimensiones. En un espacio tan simple como éste usualmente nos interesa hablar de puntos y, si fuese posible, de figuras geométricas mas complejas. Por ahora, hablemos sólo de puntos. De más está decir que un sistema compuesto de un solo punto es poco interesante, por lo que consideremos una situación en la cual existen dos puntos P_1 y P_2, tal como lo muestra la siguiente figura:

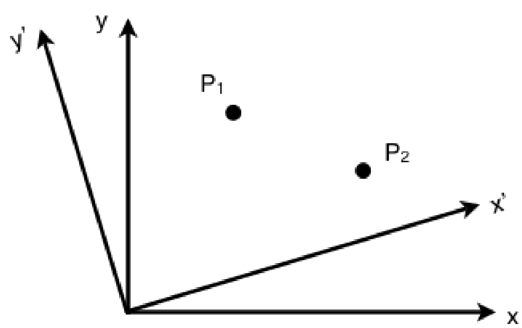
Típicamente, para estudiar estos puntos resulta útil introducir el concepto de sistemas de referencias. Ciertamente, el sistema de referencia más familiar consiste en el sistema Cartesiano, en el presente caso constituido por dos ejes ordenados (x, y) dispuestos en forma perpendicular. Llamemos K a este sistema.



En tal sistema podemos usar las coordenadas (x_1, y_1) para caracterizar la posición del primer punto y (x_2, y_2) para la posición del segundo. Más aun, podemos decir que ambos puntos están separados por una distancia Δr dada por

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{1.1}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$. Notemos, sin embargo, que bien pudimos haber adoptado el mismo sistema cartesiano pero con una configuración distinta relativa al primer sistema de referencia K. Supongamos por ejemplo un segundo sistema K' rotado en un ángulo θ con respecto al primero.



En tal sistema los puntos están caracterizados por las coordenadas (x'_1, y'_1) y (x'_2, y'_2) respectivamente. Noten sin embargo que, dado que sabemos que el segundo sistema de referencia está rotado en un ángulo θ con respecto a K, podemos establecer una relación entre las coordenadas de ambos puntos en ambos sistemas. Más concretamente, podemos escribir:

$$x'_1 = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, \qquad y'_1 = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta, \tag{1.2}$$

$$x'_2 = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, \qquad y'_2 = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta. \tag{1.3}$$

En términos de vectores y matrices, estas relaciones se pueden escribir de forma más sucinta:

$$\vec{X}'_1 = R \cdot \vec{X}_1 \qquad \vec{X}'_2 = R \cdot \vec{X}_2 \tag{1.4}$$

donde $\vec{X}_1 = (x_1, y_1)$, etc... y la matriz de rotación R viene dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Quizás más importante que estas relaciones, es el hecho que los vectores diferencia $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$ y $\Delta\vec{X}' = \vec{X}_2' - \vec{X}_1'$ pueden ser relacionados mediante relaciones similares

$$\Delta\vec{X}' = R \cdot \Delta\vec{X}. \tag{1.6}$$

Utilizando el hecho que $R^t \cdot R = R \cdot R^t = 1$ (donde t denota la traspuesta) podemos inferir la siguiente relación:

$$|\Delta\vec{X}'|^2 = \Delta\vec{X}'^t \Delta\vec{X}' = \Delta\vec{X}^t R^t R \Delta\vec{X} = |\Delta\vec{X}|^2 \tag{1.7}$$

Reconociendo que $|\Delta\vec{X}|^2 = \Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ y $|\Delta\vec{X}'|^2 = (\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$, hemos pues deducido nuestro primer resultado importante:

$$(\Delta r')^2 = \Delta r^2. \tag{1.8}$$

En otras palabras, la distancia es una cantidad invariante bajo rotaciones. No importa como elijamos la configuración de nuestros sistemas de referencia para describir los puntos P_1 y P_2, la distancia entre ambos puntos es una cantidad que no puede depender de tales disposiciones.

Ejercicio 1. En el ejemplo anterior consideramos dos sistemas de referencia relacionados por una rotación. Esto significa que necesitamos proveer un sólo parámetro para relacionar las coordenadas en un sistema con otro. Extienda los resultados anteriores para el caso en que ambos sistemas no sólo están rotados uno con respecto al otro, pero también el origen de uno está trasladado con respecto al otro. ¿Cuántos parámetros se requieren para relacionar las coordenadas en ambos sistemas?

Ejercicio 2. Evidentemente, la discusión anterior puede extenderse a tres dimensiones o más. En el caso de tres dimensiones la cantidad relacionando a dos puntos que resulta invariante bajo rotaciones y traslaciones viene dada por $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Repita el ejercicio anterior para el caso de tres dimensiones. ¿Cuántos parámetros se requieren ahora para relacionar las coordenadas de dos sistemas cartesianos?

1.2 Principio de relatividad Euclidiano

Hasta el momento hemos notado que la distancia entre dos puntos (partículas) en un espacio Euclidiano no depende de la forma (sistema) que elijamos para describirlos. Esto es ciertamente fácil de aceptar, ya que los sistemas de referencia los hemos impuesto nosotros para poder describir relaciones entre ambos puntos, pero la existencia de los puntos es independiente de nosotros, y por lo tanto, de nuestra elección de sistemas.

Evidentemente las relaciones físicas entre dos partículas, tales como interacciones, tampoco puede depender de la forma que escojamos para describirlas. Sin embargo, quizás por costumbre, insistimos en escribir las leyes de la física de tal forma que parecen depender de nuestros sistemas de referencia. Escribamos por ejemplo la segunda ley de Newton de una forma que nos resulte familiar:

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{X}} = \vec{F}. \tag{1.9}$$

En la expresión anterior $\vec{X}$ es el vector designando la posición de una partícula de masa m relativa al origen de cierto sistema, a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}$. Sin embargo, otro observador, dotado de intenciones y capacidades similares a las nuestras, pero contando con su sistema de referencia propio, escribirá exactamente la misma ecuación, provisto que tal sistema es estático con respecto al nuestro (es decir que las rotaciones y traslaciones que relacionan a su sistema con el nuestro no varían en el tiempo). Para ser más concretos, supongamos que estamos interesados en describir la interacción gravitacional de dos partículas P_1 y P_2 con masas m_1 y m_2 respectivamente, cuyas coordenadas en nuestro sistema K vienen dadas por $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ respectivamente. La fuerza en tal caso vienen dadas por

$$\vec{F} = -\frac{G_N m_1 m_2}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r}, \tag{1.10}$$

donde $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ y $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$, y por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para ambas partículas viene dada por

$$\ddot{\vec{X}}_1 = \frac{G_N m_2}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r}, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = -\frac{G_N m_1}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r} \tag{1.11}$$

Supongamos que el sistema de referencia K' de este segundo observador está rotado con respecto a nuestro sistema K mediante una matriz de rotación R constante. Esto significa que las coordenadas de P_1 y P_2 escritas en K' están relacionadas con las nuestras a través de las relaciones

$$\vec{X}'_1 = R\vec{X}_1 \qquad \vec{X}'_2 = R\vec{X}_2. \tag{1.12}$$

Utilizando el hecho de que la diferencia entre ambos vectores también satisface $\Delta\vec{X}' = R\Delta\vec{X}$, podemos deducir, multiplicando R por la izquierda de ambas ecuaciones en (1.11), la siguientes relaciones validas en K'

$$\ddot{\vec{X}}'_1 = \frac{G_N m_2}{(\Delta r')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta r'}, \qquad \ddot{\vec{X}}'_2 = -\frac{G_N m_1}{(\Delta r')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta r'} \tag{1.13}$$

donde, dado que R es constante, hemos usado $R\ddot{\vec{X}}_1 = (R\vec{X}_1)^{\cdot\cdot} = \ddot{\vec{X}}'_1$. Para deducir la expresión anterior también fue importante recordar que $\Delta r^2 = (\Delta r')^2$ es un invariante bajo rotaciones. Hemos pues comprobado que la ley universal de la gravitación de Newton es invariante bajo rotaciones en cierto sentido: Esta se escribe en forma idéntica en dos sistemas de referencia conectadas por rotaciones constantes.

Ejercicio 3. Compruebe que las leyes de Newton también se escriben en forma idéntica si ambos sistemas están conectados no solo por rotaciones constantes, pero también traslaciones constantes.

Ya estamos en condiciones de formular nuestro primer principio de relatividad. Llamemos a éste le principio de relatividad Euclidiano: Las leyes de la naturaleza son escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia conectados por rotaciones y traslaciones constantes.

Ejercicio 4. Compruebe que las leyes de Newton fallan en satisfacer nuestro principio de relatividad Euclidiano si los ángulos de rotación relacionando dos sistemas de referencia están variando en el tiempo.

1.3 Sistemas de referencias inerciales

El lector atento ciertamente ha notado que nuestro análisis anterior es incompleto e insatisfactorio. Existe una clase particular de sistemas de referencia que son de importancia fundamental para el estudio de las leyes de Newton. Estos son los llamados sistemas de referencia inerciales. Definimos un sistema de referencia inercial como aquel en el cual un cuerpo en movimiento libre (un cuerpo en movimiento sobre el cual no están siendo aplicadas fuerzas externas) permanece moviéndose a velocidad constante. Si dos sistemas de referencia se mueven uniformemente uno respecto al otro, y uno de ellos es inercial, entonces el otro también es necesariamente inercial. Es decir, existe una clase de equivalencia infinita de sistemas inerciales.

Estrictamente hablando, las ecuaciones de gravitación de Newton (1.11) sólo pueden ser escritas de tal forma si el sistema de referencia es inercial. Notemos por ejemplo que si no hubiese interacción gravitacional entre ambas partículas (lo que corresponde a apagar el acoplamiento de Newton $G_N \to 0$) entonces uno simplemente tendría

$$\ddot{\vec{X}}_1 = 0, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = 0, \tag{1.14}$$

y por lo tanto ambas partículas se moverían libremente a velocidad constante. Recordemos que para analizar la situación en la cual $G_N \neq 0$ debemos pensar en ambas partículas como parte de un sistema compuesto caracterizadas por un centro de masas

$$\vec{X}_0 = \frac{m_1 \vec{X}_2 + m_2 \vec{X}_1}{m_1 + m_2}. \tag{1.15}$$

De esta forma, ambas partículas son componentes de una partícula compuesta cuya ubicación en nuestro sistema de coordenadas viene dada por $\vec{X}_0$. En tal caso es fácil comprobar que tal partícula compuesta se mueve libremente con una velocidad constante, dado que en virtud de las ecuaciones de movimiento uno tiene la relación:

$$\ddot{\vec{X}}_0 = 0. \tag{1.16}$$

Si estuviésemos muy lejos de este sistema compuesto de partículas, de hecho sólo podríamos distinguir una única partícula P_0 a velocidad uniforme. Esto revela que nuestro sistema inicial en el cual escribimos las ecuaciones (1.11) efectivamente era inercial.

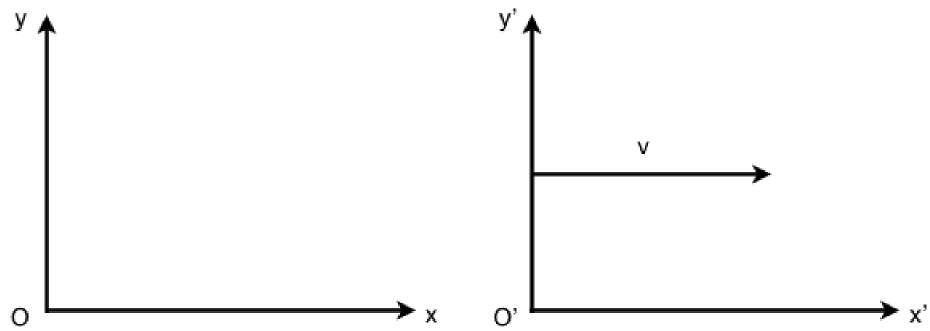
1.4 Principio de la relatividad

Usando como motivación nuestra ley de la relatividad Euclidiana, resulta natural hacer un esfuerzo para extenderla incorporando el concepto más amplio de sistemas de referencia inerciales. La formulación de este principio es de hecho sencillo: *Las leyes de la naturaleza deben poder ser escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia inerciales.* En otras palabras, las ecuaciones de movimiento expresando las leyes de la naturaleza son invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas dede un sistema inercial a otro. Pero ¿Cuáles son las transformaciones correctas relacionando las coordenadas de dos sistemas de referencia inerciales?

1.5 Principio de relatividad Galiliano

Supongamos dos observadores O y O' moviendose a una velocidad relativa $\vec{v}$ constante. Ambos observadores pueden, por derecho propio, establecer sus sistemas de referencia K y K' con los orígenes centrados en ellos mismos (ver figura). Tales sistemas son, por definición, sistemas de referencias inerciales. La experiencia nos revela que una buena relación matemática entre ambos sistemas de coordenadas K y K' bajo estas circunstancias viene dada por las célebres transformaciones de Galileo. En el caso en que ambos sistemas están convenientemente alineados y la velocidad v de O' relativa a O es en la dirección del eje x, entonces estas transformaciones adquieren la forma sencilla

$$x' = x - vt, \qquad y' = y \qquad z' = z, \tag{1.17}$$



donde por simplicidad, también hemos asumido que en $t = 0$ la posición de ambos observadores es coincidente. Es fácil verificar que si un cuerpo se mueve a velocidad $\vec{u}$ en K, entonces el observador en O' lo registrara en su sistema de referencia K' a una velocidad

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \tag{1.18}$$

La verdadera importancia de las transformaciones de Galileo es que las leyes de Newton son invariantes bajo su acción, en el sentido que dichas leyes son expresadas de forma idéntica en ambos sistemas. Por dicho motivo, resulta natural especificar que el principio de relatividad expresado en 1.4 debe ser complementado con las transformaciones de Galileo. Veremos, sin embargo, que esta actitud es algo apresurada.

1.6 Interacciones

Observemos que las ecuaciones (1.11) poseen una propiedad desconcertante. Si se interviene en el sistema descrito por estas ecuaciones desplazando una de las partículas de su posición, la segunda partícula sentirá dicho efecto en forma instantánea. Esto se debe a que, en general, en mecánica Newtoniana, la fuerza entre partículas puede ser deducida a partir de un potencial de energía, que es función únicamente de las coordenadas de las partículas (más bien de la distancia relativa).

Sin embargo, resulta natural exigir que la interacción entre partículas no sea instantáneo, y que, si algún cambio toma lugar en alguna de las partículas del sistema, influenciará a otras partículas sólo después de un cierto lapso de tiempo. Esto implica la existencia de una velocidad máxima v_{max} de propagación de interacción.

Dicha velocidad v_{max} es máxima dado que, si hubiesen partículas o cuerpos que fuesen capaces de exceder tal velocidad, sería posible realizar un proceso incluyendo una interacción con una velocidad mayor a la ya acordada velocidad máxima de interacción. Cuando nos refiramos a interacciones propagandose a tal velocidad, hablaremos de señales.

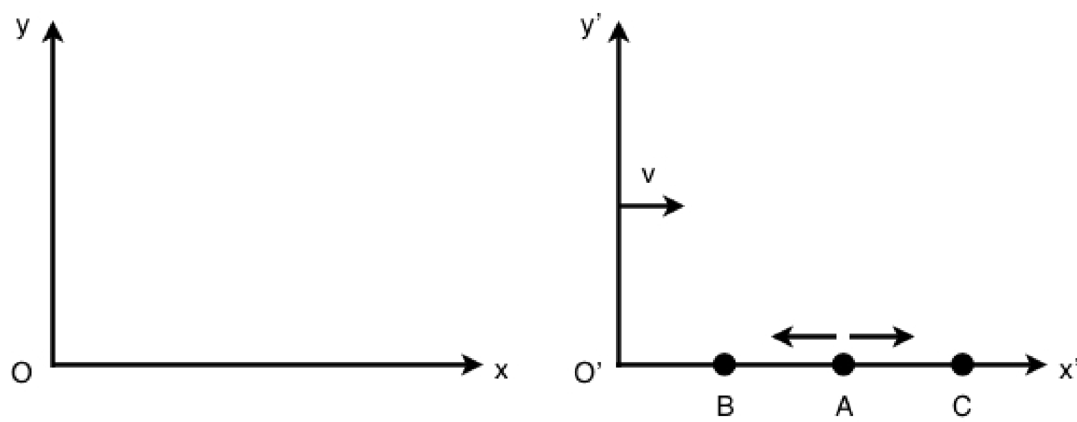
1.7 Principio de relatividad especial de Einstein

Si existe una velocidad máxima de propagación de señales, claramente el principio de relatividad Galiliano no puede ser correcto. En efecto, si las transformaciones de Galileo fuesen correctas, siempre se podría constatar una velocidad mayor que la de las señales mediante el movimiento relativo adecuado. Esto implica que debemos cambiar drásticamente nuestra visión del espacio y del tiempo, puesto que si hemos de persistir con el principio de relatividad expresado en la Sección 1.4, debemos aceptar que la velocidad $v_{\rm max}$ es universal y registrada de forma idéntica por todos los observadores utilizando sistemas de referencia inerciales para escribir las leyes de la naturaleza. En otras palabras, $v_{\rm max}$ es necesariamente una constate universal. La velocidad de la luz es un candidato ideal para ser identificada como dicha constante. Más adelante veremos que en efecto este es el caso y, por lo tanto

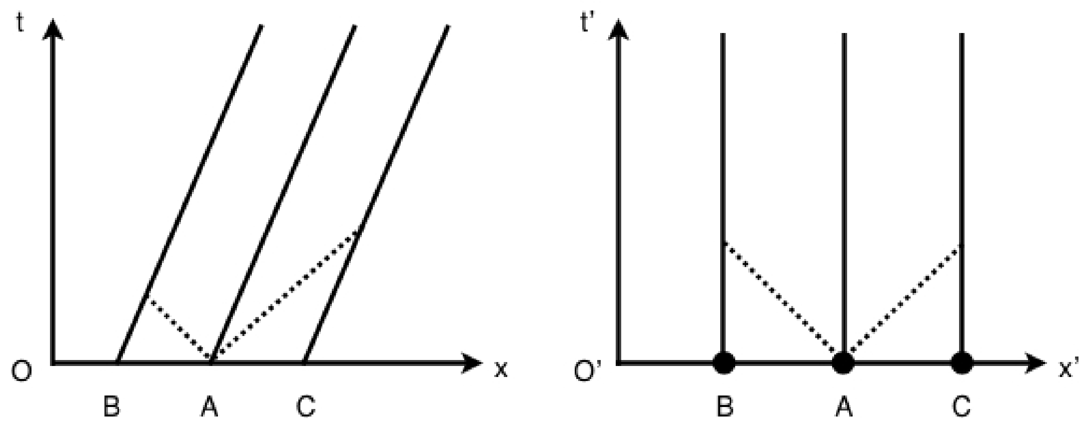
$$v_{\rm max} = c = 299792 \text{Km/s}. \tag{1.19}$$

1.8 Sobre el concepto de simultaneidad

Es posible notar desde ya que ciertas nociones forjadas en el estudio de la mecánica no relativista (Newtoniana) son radicalmente afectadas. Una de ellas es el concepto de simultaneidad. En efecto, supongamos la misma situación descrita por la figura 2.3. Esta vez, sin embargo, el observador O' observa la siguiente situación: Dos señales abandonan una fuente A en reposo con respecto a K' en direcciones opuestas a lo largo del eje x. Dos receptores B y C, también en reposo con respecto a K' se encuentran a la misma distancia de A, y están dispuestos sobre el eje x para interceptar las señales. Desde el



punto de vista de O', claramente ambas señales llegan a B y C en forma simultánea, en tiempos $t'_B = t'_C$. Dado que hemos aceptado que la velocidad de la luz es una constante universal, debemos concluir que el observador O, utilizando su sistema de referencia K para registrar eventos, percibirá que las señales son interceptadas por B y C a tiempos t_B y t_C que no coinciden (ver siguiente figura). Para llegar a esta conclusión no hemos

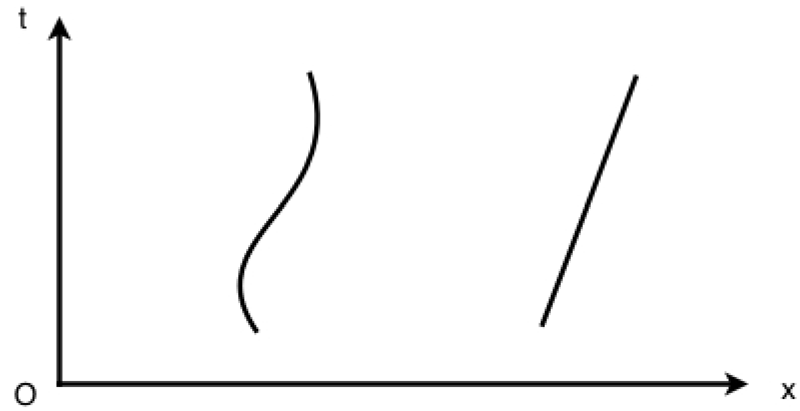


hecho más que aceptar dos principios básicos. Primero, el principio de la relatividad, que establece que las leyes de la naturaleza deben ser escritas en forma idénticas en todos los sistemas inerciales. Y segundo, la existencia de una velocidad máxima de propagación para las interacciones. La combinación de ambos principios es lo que se denomina el principio de relatividad de Einstein.

Es importante señalar, sin embargo, que la Mecánica de Newton no carece de "relatividad" en el mismo sentido profundo del principio de relatividad de Einstein, ya que, como hemos visto, las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo, las que relacionan a observadores en sistemas inerciales. El verdadero cambio conceptual llega a partir de aceptar la existencia de una velocidad máxima de propagación de señales. Históricamente, esto fue posible sólo gracias a un mayor entendimiento de los fenómenos electromagnéticos y la naturaleza ondulatoria de la luz.

1.9 Intervalos espacio-temporales

Evidentemente, para poder entender este tipo de discrepancias debemos reeducar nuestra noción del espacio-tiempo. Para ello resulta conveniente introducir ciertos conceptos básicos que nos serán útiles en el estudio de la relatividad especial. En general, trabajaremos con espacios geométricos donde el tiempo puede ser representado mediante un eje coordenado, al igual que el resto de las coordenadas espaciales (tal como en la figura anterior). En dichos espacios, eventos vienen representados por puntos, caracterizados por coordenadas determinando el tiempo en el que el evento ocurre y las coordenadas espaciales. Por otro lado, una partícula puede ser representada como una sucesión de eventos, siguiendo la trayectoria de la partícula. La curva compuesta por tal sucesión de eventos es denominada línea mundo, y en el caso que la partícula se propague a velocidad constante, la línea mundo corresponde una linea recta en un sistema de referencia inercial.



Ahora bien, supongamos dos eventos P_1 y P_2 arbitrarios. En general, dado un sistema inercial K, podremos asignar a estos eventos coordenadas espacio-temporales (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) respectivamente. Definamos al intervalo espacio temporal Δs^2 entre ambos eventos de la siguiente forma:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{1.20}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta z = z_2 - z_1$. Por otro lado, en otro sistema inercial K' estos eventos vendrán descritos por las coordenadas espacio-temporales (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) y (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) respectivamente, por lo que podemos definir una cantidad similar en términos de las coordenadas de K':

$$(\Delta s')^2 = -c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \tag{1.21}$$

donde $\Delta t = t'_2 - t'_1$, $\Delta x = x'_2 - x'_1$, $\Delta y = y'_2 - y'_1$ y $\Delta z = z'_2 - z'_1$. Supongamos por un momento que ambos eventos están separados por un intervalo espacio-temporal caracterizado por $\Delta s^2 = 0$. La ecuación $\Delta s^2 = 0$ corresponde ni más ni menos que a una curva rectilínea en la cual una señal se propaga desde P_1 a P_2 a la velocidad de la luz. Sin embargo sabemos que la propagación de una señal es registrada en todos los sistemas de referencia con la misma velocidad (ya que corresponde a la velocidad universal máxima). Por lo tanto, si $\Delta s^2 = 0$ en K, necesariamente uno debe registrar $(\Delta s')^2 = 0$ en K'. En otras palabras $(\Delta s)^2 = 0$ y $(\Delta s')^2 = 0$ son equivalentes. Noten que ésta conclusión es completamente independiente de la orientación relativa de los ejes, o desplazamiento del origen de ambos sistemas, uno con respecto a otro.

Preguntemonos ahora cómo están estos intervalos, escritos en distintos sistemas inerciales, relacionados para eventos P_1 y P_2 arbitrarios (es decir, no necesariamente conectados por señales). Para ello, consideremos primero el caso en que tales eventos están infinitesimalmente cerca el uno del otro. En tal caso nos permitimos escribir el intervalo espacio-temporal en forma infinitesimal

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.22}$$

Claramente, si la separación de dos eventos es infinitesimal en K, también lo debe ser en K'. De modo que la única relación entre ds y ds' aceptable es una relación lineal de la forma:

$$ds = ads'. \tag{1.23}$$

Observen que ninguna otra cantidad infinitesimal puede entrar en esta relación, dado que para $ds' = 0$ sabemos que debemos invariablemente reobtener $ds = 0$. Más aún, el coeficiente a sólo puede depender del valor absoluto de la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En efecto, observen primero que a no puede depender ni de las coordenadas espaciales ni del tiempo, de otro modo distintos puntos en el tiempo y en el espacio no serían equivalentes. En forma similar, a tampoco puede depender de la dirección de la velocidad relativa, pues eso introduciría una anisotropía del espacio al momento de describir la relación entre ambos eventos[1]. Noten que en total analogía, pudimos haber escrito

$$ds' = ads, \tag{1.24}$$

donde a es precisamente la misma función. Por lo tanto podemos deducir que $a = \pm 1$. Notemos sin embargo que un caso particular corresponde a aquel en que $v = 0$, en cuyo caso debemos reobtener $ds = ds'$. Por dicho motivo, debemos concluir que $a = 1$ y en general:

$$ds = ds'. \tag{1.25}$$

Dado que hemos supuesto homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, este resultado puede ser extendido a intervalos finitos

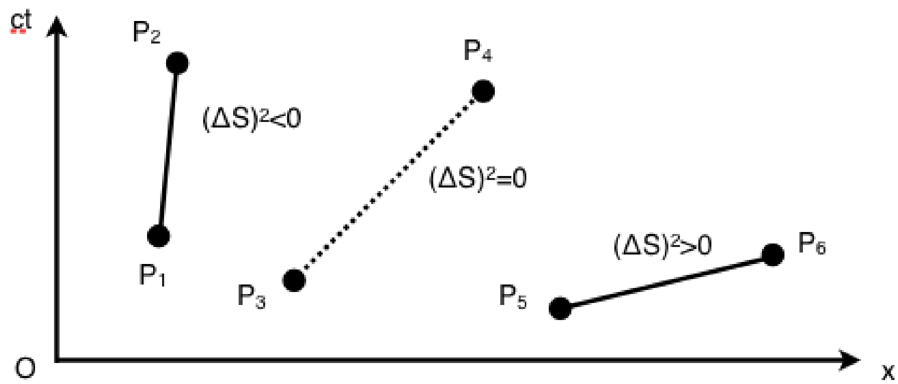
$$\Delta s = \Delta s'. \tag{1.26}$$

[1]Resulta útil pensar en estas dos reglas para el caso ya conocido que consideramos en la sección 1.1. Ahí bien pudimos haber deducido que el intervalo espacial $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dy^2$ está relacionado al intervalo $dr'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dy'^2$ mediante una relación lineal de la forma $dr = adr'$. En tal caso resulta natural entender por qué a no puede depender ni de las coordenadas ni de los ángulos de la matriz de rotación R, por exactamente las mismas razones

De esta forma, hemos llegado a un resultado crucial: El intervalo espacio-temporal Δs^2 caracterizando dos eventos arbitrarios es una cantidad invariante en todos los sistemas de referencia inerciales.

1.10 Variedades de intervalos

Noten que existen tres categorías de intervalos espacio temporales, dependiendo del signo. Aquellos eventos que están separados por intervalos $\Delta s^2 < 0$ se dicen separados por un intervalo tipo tiempo. Por otro lado, eventos cuya separación esta caracterizada por $\Delta s^2 = 0$, se dicen separados por un intervalo tipo luz. Finalmente, dos eventos caracterizados una separación $\Delta s^2 > 0$, se dicen separados por un intervalo tipo espacio. Para graficar estas tres situaciones, resulta muy conveniente dibujar el eje temporal multiplicado por c. En tal caso, si nos enfocamos por conveniencia solamente en el plano (x, t), los intervalos tipo luz corresponden a curvas rectilíneas siempre en 45^0. La siguiente figura muestra los tres tipos de intervalos.



1.11 Cono de luz

Un concepto importante en relatividad especial es aquel del "cono de luz". Supongamos un evento P_1 con coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y visualicemos la superficie definida por el conjunto de todos los eventos $P = (t, x, y, z)$ tales que:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0, \tag{1.27}$$

donde $\Delta t = t - t_1$, $\Delta x = x - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ y $\Delta z = z - z_1$. A esta superficie se le denomina el cono de luz, ya que toda línea mundo uniendo a P_1 con un evento P sobre la superficie, corresponde a la trayectoria que describiría un rayo de luz. La siguiente figura muestra como se vería el cono si nos despreocupamos del eje z. Observen que cualquier evento $P = (t, x, y, z)$ tal que $\Delta s^2 < 0$ (a una distancia tipo tiempo de P_1) necesariamente está dentro del cono, mientras que si es tal que $\Delta s^2 > 0$ (a una distancia tipo espacio de P_1) necesariamente está fuera del cono.

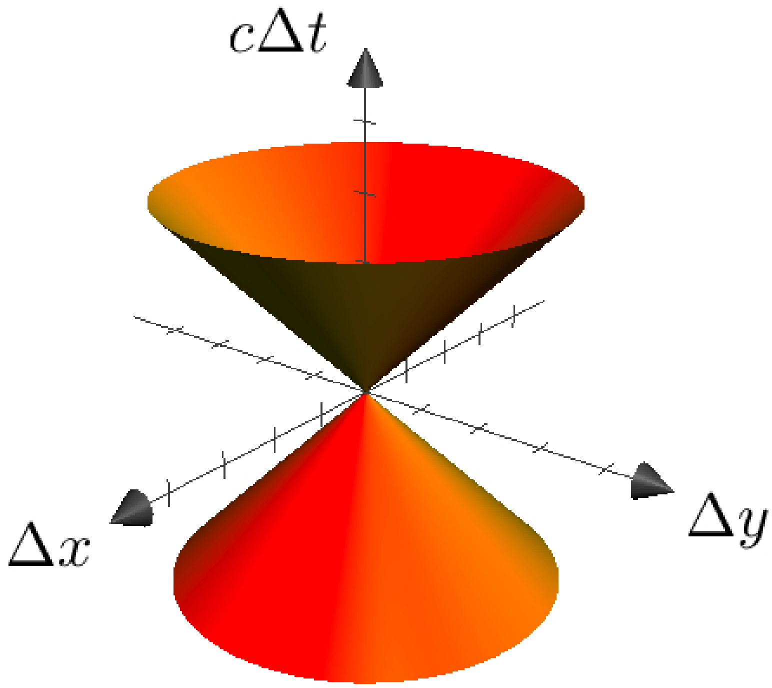


Figure 1: La figura muestra la superficie $\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0$ proyectada sobre el plano (ct, x, y). Esta superficie es denominada cono de luz.

2 Transformaciones de Lorentz

Ahora procedemos a deducir y estudiar las celebres transformaciones de Lorentz, relacionando sistemas de referencia inerciales para observadores en movimiento relativo uniforme.

2.1 Tiempo propio

Antes de deducir las transformaciones de Lorentz, resulta útil introducir un concepto fundamental en el estudio de la cinemática relativista. Supongamos un observador inercial O junto a su sistema de referencia K. Por definición, este observador verá partículas libres en movimiento uniforme y rectilíneo. Supongamos en particular una partícula con velocidad $\vec{v}$ con respecto a O. Ya sabemos que si dicha partícula es física (real), entonces $v < c$ y su línea de mundo debe ser tipo tiempo. Es decir, cualquier par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo deben estar separados por un intervalo espacio-temporal tal que

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < 0. \tag{2.1}$$

Más aún, dado que el movimiento es rectilíneo, tendremos que la la velocidad de la partícula satisface

$$v^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2. \tag{2.2}$$

Por otro lado, debe existir un sistema inercial K' donde dicha partícula se registra en reposo. Esto significa que para el mismo par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo éstos estarán caracterizados en K' por $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$ y $\Delta z' = 0$. Tendremos por lo tanto la relación

$$-c^2(\Delta t')^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{2.3}$$

Noten que t' es la coordenada utilizada para medir el tiempo en el sistema de referencia en reposo con respecto a la partícula en cuestión y por lo tanto corresponde al tiempo percibido por la partícula. Es más, si reemplazásemos a la partícula por un reloj, este sería precisamente el tiempo indicado por dicho reloj, al ser observado por O. Por lo tanto, nos referiremos a este tiempo como el *tiempo propio* τ de la partícula. Notemos que un cierto periodo *propio* $\Delta\tau = \Delta t'$ viene relacionado con un periodo de tiempo medido por un reloj en K de la siguiente forma

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta t)^2}{c^2}\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right], \tag{2.4}$$

y por lo tanto, podemos escribir $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Esto quiere decir que el tiempo de un reloj en movimiento es percibido por un observador O pasando en forma más lenta que aquel registrado por su reloj

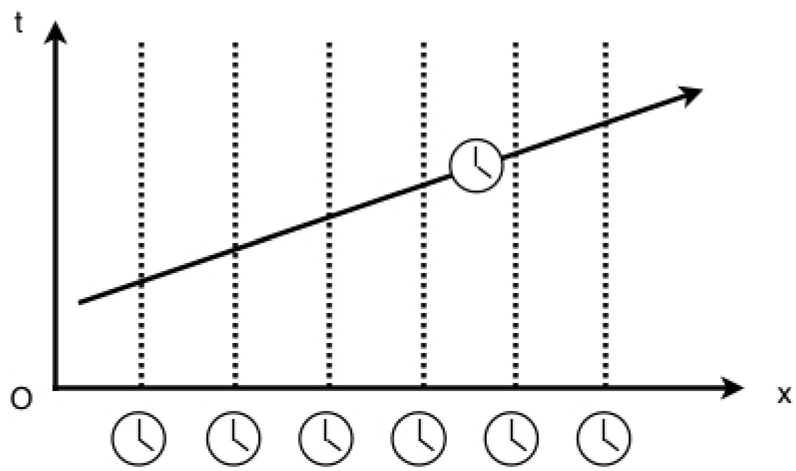
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.5}$$

2.2 Sobre el concepto de medición

Hay algo que a primera vista resulta extraño en la conclusión anterior. Supongamos que en vez de una partícula en movimiento rectilíneo uniforme tenemos un observador O' con un reloj. Este, al observar O moviéndose a una velocidad $-\vec{v}$ con respecto a si mismo habría deducido, correctamente, que el tiempo propio de O transcurre de forma más lenta que aquel que marca su reloj. De hecho el constataría que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.6}$$

donde Δt es ahora el intervalo de tiempo propio de O. En otras palabras, ambos observadores perciben que el reloj del observador contrario marca el tiempo a intervalos regulares mas lentos que el suyo. ¿Cómo podemos explicar esta aparente contradicción? Para responder a esta pregunta debemos aclarar el concepto de medición. De hecho, hay cierta asimetría en la labor de medir y comparar relojes. Para ser más precisos, y volviendo al caso anterior de la Sección 2.1, si el observador O deseara medir el tiempo propio de un reloj en movimiento rectilíneo y uniforme, estará obligado a construir un arreglo de relojes, todos calibrados, y ubicados en distintos puntos espaciales de su sistema de referencia (ver figura). En otras palabras, el observador requiere construir un



arreglo de relojes consistente con su sistema de referencia para comparar el tiempo con el reloj en movimiento. Hay por lo tanto una asimetría inevitable al momento de intentar comparar relojes. Lo mismo ocurre si ahora reemplazamos al reloj por un obsevador O' y éste desease comparar como evoluciona el tiempo marcado por el reloj de O con sus sistema de referencia.

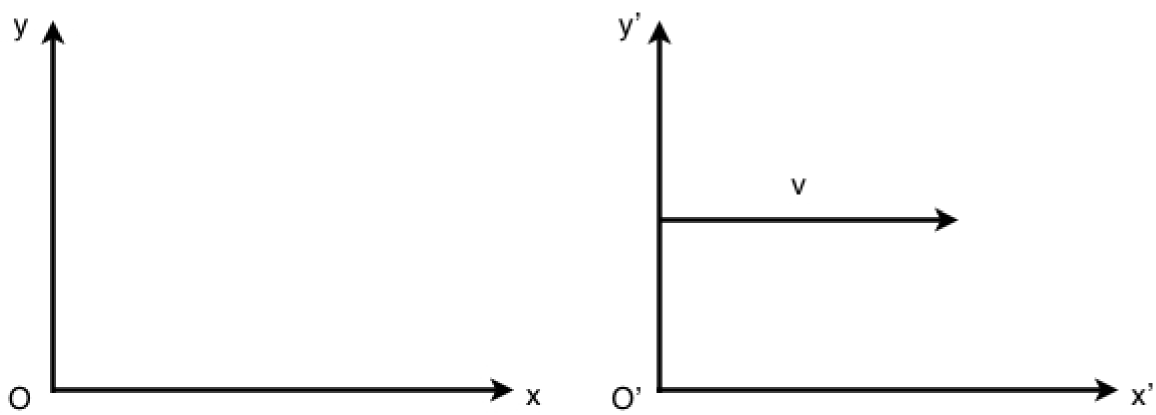
2.3 Transformaciones de Lorentz

Supongamos dos observadores O y O' con una velocidad relativa entre ambos dada por v. Ambos observadores estarán tentados en utilizar sus propios diagramas espacio-temporales (sistemas de referencia) para ubicar eventos. Por dicho motivo distinguimos entre los sistemas de referencias K y K' caracterizados por coordenadas (t, x, y, z) y (t', x', y', z') respectivamente. En la clase anterior vimos que, sin importar la orientación de los ejes, o desplazamiento del origen de dichos sistemas, dado dos eventos arbitrarios P_1 y P_2, existe una cantidad invariante, denominada el intervalo espacio-temporal Δs^2, dada por

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2,\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, etc... Es deseable contar con una transformación matemática relacionando directamente a las coordenadas de ambos sistemas que cumplan con la propiedad de mantener $(\Delta s)^2$. Al igual que con las rotaciones que vimos en la Sección 1.1, estas transformaciones deben ser relaciones lineales entre las diferencias $(\Delta t, \Delta\vec{x})$ y $(\Delta t', \Delta\vec{x}')$. Esto es evidente, pues buscamos mantener invariante una cantidad que es cuadrática en la diferencia de coordenadas.

En general estas transformaciones son complicadas (las deduciremos en su forma general un poco más adelante) pero podemos simplificar el problema de deducirlas si acordamos que ambos observadores tienen sus sistemas de referencia con los ejes espaciales alineados y que el movimiento relativo es a lo largo del eje x, tal como lo muestra la figura. Partamos



considerando la existencia de dos eventos P_1 y P_2 ubicados en el plano (t, x) de K. Estos eventos están caracterizados por un intervalo $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$. Evidentemente estos eventos continuarán siendo registrados en el plano (t', x') en K', por lo que sólo debemos considerar la invariancia del intervalo $(\Delta s')^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2$. Tenemos pues

$$-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2. \tag{2.8}$$

Para deducir las transformaciones lineales teniendo lugar entre las coordenadas de ambos sistemas usemos el siguiente truco. Notemos que al escribir $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$, la expresión anterior puede ser reexpresada de la forma

$$(\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 = (\Delta\eta')^2 + (\Delta x')^2. \tag{2.9}$$

Esta expresión es de hecho conocida. Corresponde ni más ni menos que al intervalo invariante bajo rotaciones en el plano (η, x) examinado en la Sección 1.1. Para tal situación sabemos bien cuales son las transformaciones entre coordenadas. Estas son

$$\Delta\eta' = -\Delta\eta \sin\theta + \Delta x \cos\theta, \qquad \Delta x' = \Delta x \cos\theta + \Delta\eta \sin\theta, \tag{2.10}$$

mientras que sus inversas vienen dadas por

$$\Delta\eta = \Delta\eta' \sin\theta + \Delta x' \cos\theta, \qquad \Delta x = \Delta x' \cos\theta - \Delta\eta' \sin\theta. \tag{2.11}$$

Para entender el significado de θ en este caso, consideremos la linea de mundo de una partícula en reposo en el sistema K'. Desde la perspectiva de O, esta partícula se mueve a una velocidad v y sigue un movimiento rectilíneo. Supongamos que los eventos P_1 y P_2 interceptan el paso de esta partícula. Luego, tendremos $\Delta x/\Delta t = v$. Desde la perspectiva de O', los dos eventos P_1 y P_2 están caracterizaos por $\Delta x' = 0$, dado que la partícula no se desplaza en su sistema de coordenadas. Por lo tanto, tenemos

$$\Delta\eta = \Delta\eta' \sin\theta, \qquad \Delta x = -\Delta\eta' \sin\theta. \tag{2.12}$$

Dividiendo la segunda relación por la primera, tenemos

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -ic \tan\theta. \tag{2.13}$$

Es decir, θ esta directamente relacionado con la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En virtud de esta última relación, podemos escribir

$$\sin\theta = \frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.14}$$

Volviendo a las ecuaciones (2.11), y reescribiendo $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$ deducimos finalmente las transformaciones de Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.15}$$

Para deducir las relaciones inversas, podemos invertir directamente las relaciones lineales anteriores, o alternativamente, recordar que ellas son deducidas del mismo razonamiento anterior pero con v reemplazado por $-v$. Estas vienen dadas por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.16}$$

Es fácil comprobar que en efecto $(\Delta s)^2$ es un invariante bajo estas transformaciones. Terminemos esta sección señalando que si los eventos P_1 y P_2 están adicionalmente separados por componentes Δy y Δz perpendiculares al eje x, donde el movimiento relativo entre los observadores se realiza, entonces éstas no sufrirán cambios bajo las transformaciones. En otras palabras

$$\Delta y = \Delta y', \qquad \Delta z = \Delta z'. \tag{2.17}$$

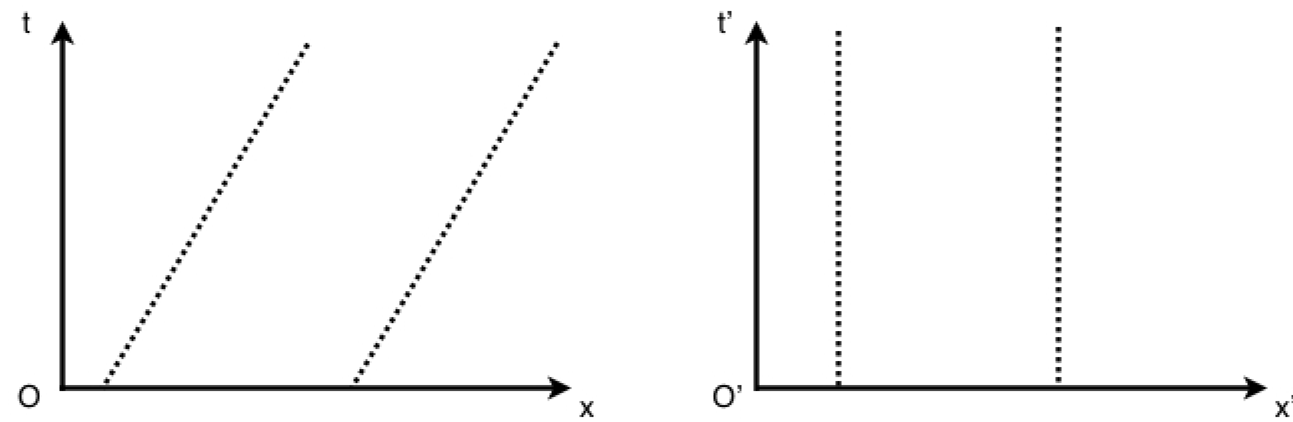
Para convencerse de esto podemos volver a la notación auxiliar mediante la cual escribimos $ic\Delta t = \Delta\eta$. En tal caso tenemos $(\Delta s)^2 = (\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Este intervalo es invariante bajo rotaciones en un espacio de cuatro dimensiones. Sin embargo, ya vimos que si el movimiento entre los sistemas de referencia es a lo largo del eje x, la transformación entre ambos sistemas equivale a una rotación en el plano (η, x). Tal rotación en efecto deja sin modificación a las cantidades Δy y Δz.

2.4 Longitud propia

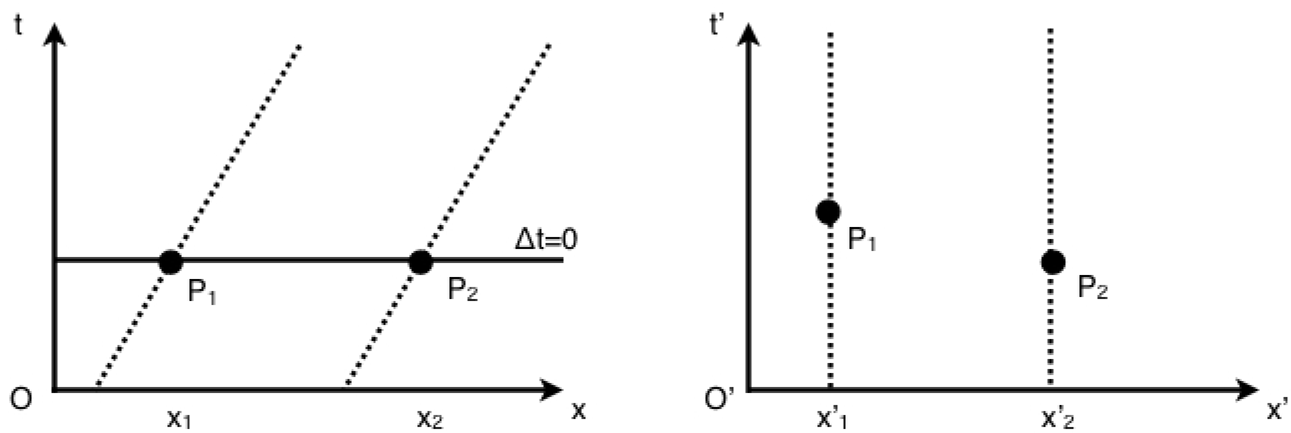
Como primera aplicación de las transformaciones de Lorentz, discutamos la medición del largo de un objeto extendido en movimiento, por ejemplo una barra. Supongamos que contamos con una barra *rígida* que en reposo mide ℓ_0. Dado que este es el largo medido en un sistema de referencia donde la barra está en reposo, nos referiremos a éste como el *largo propio* de la barra. Supongamos ahora que la misma barra está en movimiento, con una velocidad constante v con respecto a un observador O, y en una dirección que coincide con el largo de la barra. Como es costumbre, alineemos la dirección del movimiento (y del largo) con el eje x del sistema de referencia K utilizado por O para registrar eventos. En dicho sistema de referencia, O podrá constatar que la barra cubre una región de dos dimensiones en el plano (x, t) delimitada por dos *líneas mundo* denotando los extremos de la barra (ver siguiente figura). Es usual denominar a tal región como *sabana mundo*. Es conveniente pensar en los extremos de la barra como partículas. Dado que la barra pretende ser un objeto físico, los extremos de la barra deben seguir lineas de mundo tipo tiempo (recuerden la discusión de la Sección 1.10). En el presente caso, el observador O claramente verá los extremos de la barra en movimiento rectilíneo uniforme, a velocidad v. Por otro lado un observador O' en reposo con respecto a la barra, pero a velocidad v con respecto a O, verá que los extremos de la barras corresponden a líneas mundo completamente verticales en el plano (x', t') de su sistema de referencia, la primera en x'_1 y la segunda en x'_2. Para el observador O', la diferencia de las coordenadas corresponde a ℓ_0, es decir

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \ell_0. \tag{2.18}$$

Para establecer la medición del largo de la barra que hace O, debemos primero acordar que para éste, la medición del largo de un objeto extendido se hace en forma simultánea.



Es decir, el observador O debe registrar la posición de los extremos de la barra a tiempos iguales. Por lo tanto, para él, el largo de la barra consistirá a la distancia espacial entre dos eventos P_1 y P_2 caracterizados por $\Delta t = 0$ (ver siguiente figura). Utilizando (2.18) y



la segunda ecuación de (2.16), vemos pues que

$$\Delta x = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2.19}$$

Dado que $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, vemos que el largo medido por O es menor que el largo propio de la barra. A esto se le denomina contracción de Lorentz. Notemos que la forma en que hemos deducido este resultado fue asociando a los extremos de la barra lineas de mundo, y asociando dos eventos P_1 y P_2 a la intersección de estas líneas de mundo con una curva a t =constante. Para O, estos eventos son simultáneos, que es la única forma que el o ella puede medir longitudes (piensen bien esto!). Por otra parte, estos eventos no serán simultáneos para un observador O' en reposo con respecto a la barra (ver figura anterior). De hecho la primera ecuación (2.16) nos dice que si bien P_1 y P_2 están separados por una distancia $\Delta x' = \ell_0$ en K', también son registrados por O' a destiempo:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = -\frac{v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -v\ell_0/c^2, \tag{2.20}$$

donde hemos usado (2.19) en la segunda igualdad. Este es quizás el aspecto más característico de la relatividad especial, es decir, el que no exista una forma absoluta de definir simultaneidad. Aquellos eventos que ocurren en forma simultánea para un observador inercial O no serán observados como simultáneos para un observador O' en movimiento con respecto a O.

Para terminar, observen que en el cálculo anterior necesitamos especificar si el origen de ambos sistemas de referenca coinciden o no. Es decir, no fue necesario acordar que los relojes utilizados en ambos sistemas de referencia están sincronizados de tal forma que para $(t, x) = (0, 0)$ uno tiene $(t, x) = (0, 0)$, lo que es utilizado en muchos textos. De hecho, en general tal convención es completamente irrelevante para resolver problemas en relatividad especial, ya que nuestro interés es típicamente describir la relación entre dos o mas eventos, en donde intervienen diferencias de coordenadas, y no la ubicación de los orígenes de los sistemas de referencia.

2.5 Notación β y γ

En ocasiones resulta útil introducir dos parámetros β y γ para simplificar la escritura de las transformaciones de Lorentz. Estos son:

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{2.21}$$

Teniendo en cuenta estos parámetros, las transformaciones de Lorentz pueden ser reexpresadas como

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x'), \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t'), \tag{2.22}$$

(donde hemos omitido las relaciones adicionales $\Delta y = \Delta y'$ y $\Delta z = \Delta z'$) mientras que sus inversas son

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x), \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t). \tag{2.23}$$

Noten también que por conveniencia hemos multiplicado por c en ambos lados, de modo que Δt y $\Delta t'$ siempre vienen acompañados del factor c.

2.6 Adición de velocidades

Claramente podemos repetir la deducción de las transformaciones de Lorentz para el caso en que dos eventos P_1 y P_2 están infinitesimalmente separados. En tal caso las transformaciones de Lorentz adquieren la forma

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \tag{2.24}$$

junto a las relaciones $dy = dy'$ y $dz = dz'$. Supongamos ahora que nuestro observador O constata una partícula en movimiento a velocidad u a lo largo del eje x. El movimiento de dicha partícula satisface

$$u = \frac{dx}{dt}. \tag{2.25}$$

Supongamos ahora que un segundo observador O' se mueve a velocidad v con respecto a O, también a lo largo del eje x (es decir $dy = dz = 0$). El observador O' observara la trayectoria de la partícula caracterizada por los infinitésimos dx' y dt' y por lo tanto observará una velocidad

$$u' = \frac{dx'}{dt'}. \tag{2.26}$$

Es posible obtener una relación de adición de velocidades involucrando las cantidades u y u'. Para obtenerla, dividamos la segunda relación en (2.24) por la primera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c\,dt'}{dt' + \beta dx'/c} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}. \tag{2.27}$$

Esta relación nos permite finalmente obtener

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \tag{2.28}$$

que es la relación deseada. También es posible invertir esta relación para obtener u' en términos de u. Es posible obtener tal relación ya sea invirtiendo directamente la relación anterior, o simplemente recordando que el mismo razonamiento para deducir la regla puede ser repetido pero invirtiendo el rol de los obsevadores mediante $v \to -v$

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \tag{2.29}$$

Comparen esta última relación con la regla Galiliana para la adición de velocidades (1.18) examinada en la primera cátedra. Noten que si la velocidad de propagación de señales fuese infinita ($c \to +\infty$) reobtendríamos la regla Galiliana, lo que es consistente con nuestra discusión sobre la instantaneidad de las interacciones.