Apuntes de Física Moderna: Relatividad Especial

Gonzalo Palma

(Apuntes en construcción)

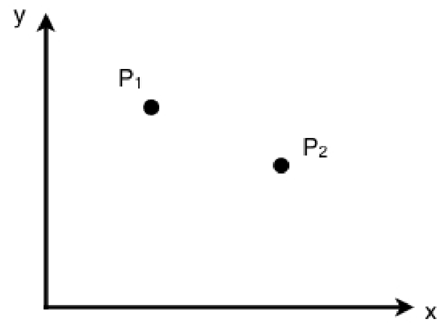
1 Principios relativistas

Comenzaremos nuestro estudio estableciendo los principios básicos tras la formulación introducida por Einstein acerca del espacio y del tiempo (o simplemente espacio-tiempo). Primero, desarrollemos algunos conceptos elementales que ciertamente ya nos son familiares, pero que nos serán tremendamente útiles.

1.1 Sistemas de referencias

Partamos considerando, por simplicidad, un espacio Euclidiano de dos dimensiones. En un espacio tan simple como éste usualmente nos interesa hablar de puntos y, si fuese posible, de figuras geométricas mas complejas. Por ahora, hablemos sólo de puntos. De más está decir que un sistema compuesto de un solo punto es poco interesante, por lo que consideremos una situación en la cual existen dos puntos P_1 y P_2, tal como lo muestra la siguiente figura:

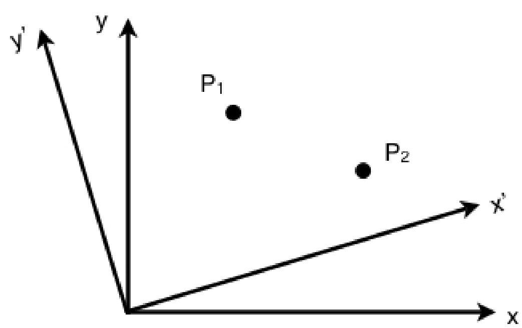
Típicamente, para estudiar estos puntos resulta útil introducir el concepto de sistemas de referencias. Ciertamente, el sistema de referencia más familiar consiste en el sistema Cartesiano, en el presente caso constituido por dos ejes ordenados (x, y) dispuestos en forma perpendicular. Llamemos K a este sistema.



En tal sistema podemos usar las coordenadas (x_1, y_1) para caracterizar la posición del primer punto y (x_2, y_2) para la posición del segundo. Más aun, podemos decir que ambos puntos están separados por una distancia Δr dada por

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{1.1}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$. Notemos, sin embargo, que bien pudimos haber adoptado el mismo sistema cartesiano pero con una configuración distinta relativa al primer sistema de referencia K. Supongamos por ejemplo un segundo sistema K' rotado en un ángulo θ con respecto al primero.



En tal sistema los puntos están caracterizados por las coordenadas (x_1', y_1') y (x_2', y_2') respectivamente. Noten sin embargo que, dado que sabemos que el segundo sistema de referencia está rotado en un ángulo θ con respecto a K, podemos establecer una relación entre las coordenadas de ambos puntos en ambos sistemas. Más concretamente, podemos escribir:

$$x_1' = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, \qquad y_1' = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta, \tag{1.2}$$
$$x_2' = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, \qquad y_2' = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta. \tag{1.3}$$

En términos de vectores y matrices, estas relaciones se pueden escribir de forma más sucinta:

$$\vec{X}_1' = R \cdot \vec{X}_1 \qquad \vec{X}_2' = R \cdot \vec{X}_2 \tag{1.4}$$

donde $\vec{X}_1 = (x_1, y_1)$, etc... y la matriz de rotación R viene dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Quizás más importante que estas relaciones, es el hecho que los vectores diferencia $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$ y $\Delta\vec{X}' = \vec{X}'_2 - \vec{X}'_1$ pueden ser relacionados mediante relaciones similares

$$\Delta\vec{X}' = R \cdot \Delta\vec{X}. \tag{1.6}$$

Utilizando el hecho que $R^t \cdot R = R \cdot R^t = 1$ (donde t denota la traspuesta) podemos inferir la siguiente relación:

$$|\Delta\vec{X}'|^2 = \Delta\vec{X}'^t \Delta\vec{X}' = \Delta\vec{X}^t R^t R \Delta\vec{X} = |\Delta\vec{X}|^2 \tag{1.7}$$

Reconociendo que $|\Delta\vec{X}|^2 = \Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ y $|\Delta\vec{X}'|^2 = (\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$, hemos pues deducido nuestro primer resultado importante:

$$(\Delta r')^2 = \Delta r^2. \tag{1.8}$$

En otras palabras, la distancia es una cantidad invariante bajo rotaciones. No importa como elijamos la configuración de nuestros sistemas de referencia para describir los puntos P_1 y P_2, la distancia entre ambos puntos es una cantidad que no puede depender de tales disposiciones.

Ejercicio 1. En el ejemplo anterior consideramos dos sistemas de referencia relacionados por una rotación. Esto significa que necesitamos proveer un sólo parámetro para relacionar las coordenadas en un sistema con otro. Extienda los resultados anteriores para el caso en que ambos sistemas no sólo están rotados uno con respecto al otro, pero también el origen de uno está trasladado con respecto al otro. ¿Cuántos parámetros se requieren para relacionar las coordenadas en ambos sistemas?

Ejercicio 2. Evidentemente, la discusión anterior puede extenderse a tres dimensiones o más. En el caso de tres dimensiones la cantidad relacionando a dos puntos que resulta invariante bajo rotaciones y traslaciones viene dada por $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Repita el ejercicio anterior para el caso de tres dimensiones. ¿Cuántos parámetros se requieren ahora para relacionar las coordenadas de dos sistemas cartesianos?

1.2 Principio de relatividad Euclidiano

Hasta el momento hemos notado que la distancia entre dos puntos (partículas) en un espacio Euclidiano no depende de la forma (sistema) que elijamos para describirlos. Esto es ciertamente fácil de aceptar, ya que los sistemas de referencia los hemos impuesto nosotros para poder describir relaciones entre ambos puntos, pero la existencia de los puntos es independiente de nosotros, y por lo tanto, de nuestra elección de sistemas.

Evidentemente las relaciones físicas entre dos partículas, tales como interacciones, tampoco puede depender de la forma que escojamos para describirlas. Sin embargo, quizás por costumbre, insistimos en escribir las leyes de la física de tal forma que parecen depender de nuestros sistemas de referencia. Escribamos por ejemplo la segunda ley de Newton de una forma que nos resulte familiar:

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{X}} = \vec{F}. \tag{1.9}$$

En la expresión anterior $\vec{X}$ es el vector designando la posición de una partícula de masa m relativa al origen de cierto sistema, a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}$. Sin embargo, otro observador, dotado de intenciones y capacidades similares a las nuestras, pero contando con su sistema de referencia propio, escribirá exactamente la misma ecuación, provisto que tal sistema es estático con respecto al nuestro (es decir que las rotaciones y traslaciones que relacionan a su sistema con el nuestro no varían en el tiempo). Para ser más concretos, supongamos que estamos interesados en describir la interacción gravitacional de dos partículas P_1 y P_2 con masas m_1 y m_2 respectivamente, cuyas coordenadas en nuestro sistema K vienen dadas por $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ respectivamente. La fuerza en tal caso vienen dadas por

$$\vec{F} = -\frac{G_N m_1 m_2}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r}, \tag{1.10}$$

donde $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ y $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$, y por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para ambas partículas viene dada por

$$\ddot{\vec{X}}_1 = \frac{G_N m_2}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r}, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = -\frac{G_N m_1}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r} \tag{1.11}$$

Supongamos que el sistema de referencia K' de este segundo observador está rotado con respecto a nuestro sistema K mediante una matriz de rotación R constante. Esto significa que las coordenadas de P_1 y P_2 escritas en K' están relacionadas con las nuestras a través de las relaciones

$$\vec{X}'_1 = R\vec{X}_1 \qquad \vec{X}'_2 = R\vec{X}_2. \tag{1.12}$$

Utilizando el hecho de que la diferencia entre ambos vectores también satisface $\Delta\vec{X}' = R\Delta\vec{X}$, podemos deducir, multiplicando R por la izquierda de ambas ecuaciones en (1.11), la siguientes relaciones validas en K'

$$\ddot{\vec{X}}'_1 = \frac{G_N m_2}{(\Delta r')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta r'}, \qquad \ddot{\vec{X}}'_2 = -\frac{G_N m_1}{(\Delta r')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta r'} \tag{1.13}$$

donde, dado que R es constante, hemos usado $R\ddot{\vec{X}}_1 = (R\vec{X}_1)^{\cdot\cdot} = \ddot{\vec{X}}'_1$. Para deducir la expresión anterior también fue importante recordar que $\Delta r^2 = (\Delta r')^2$ es un invariante bajo rotaciones. Hemos pues comprobado que la ley universal de la gravitación de Newton es invariante bajo rotaciones en cierto sentido: Esta se escribe en forma idéntica en dos sistemas de referencia conectadas por rotaciones constantes.

Ejercicio 3. Compruebe que las leyes de Newton también se escriben en forma idéntica si ambos sistemas están conectados no solo por rotaciones constantes, pero también traslaciones constantes.

Ya estamos en condiciones de formular nuestro primer principio de relatividad. Llamemos a éste le principio de relatividad Euclidiano: Las leyes de la naturaleza son escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia conectados por rotaciones y traslaciones constantes.

Ejercicio 4. Compruebe que las leyes de Newton fallan en satisfacer nuestro principio de relatividad Euclidiano si los ángulos de rotación relacionando dos sistemas de referencia están variando en el tiempo.

1.3 Sistemas de referencias inerciales

El lector atento ciertamente ha notado que nuestro análisis anterior es incompleto e insatisfactorio. Existe una clase particular de sistemas de referencia que son de importancia fundamental para el estudio de las leyes de Newton. Estos son los llamados sistemas de referencia inerciales. Definimos un sistema de referencia inercial como aquel en el cual un cuerpo en movimiento libre (un cuerpo en movimiento sobre el cual no están siendo aplicadas fuerzas externas) permanece moviéndose a velocidad constante. Si dos sistemas de referencia se mueven uniformemente uno respecto al otro, y uno de ellos es inercial, entonces el otro también es necesariamente inercial. Es decir, existe una clase de equivalencia infinita de sistemas inerciales.

Estrictamente hablando, las ecuaciones de gravitación de Newton (1.11) sólo pueden ser escritas de tal forma si el sistema de referencia es inercial. Notemos por ejemplo que si no hubiese interacción gravitacional entre ambas partículas (lo que corresponde a apagar el acoplamiento de Newton $G_N \to 0$) entonces uno simplemente tendría

$$\ddot{\vec{X}}_1 = 0, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = 0, \tag{1.14}$$

y por lo tanto ambas partículas se moverían libremente a velocidad constante. Recordemos que para analizar la situación en la cual $G_N \neq 0$ debemos pensar en ambas partículas como parte de un sistema compuesto caracterizadas por un centro de masas

$$\vec{X}_0 = \frac{m_1\vec{X}_2 + m_2\vec{X}_1}{m_1 + m_2}. \tag{1.15}$$

De esta forma, ambas partículas son componentes de una partícula compuesta cuya ubicación en nuestro sistema de coordenadas viene dada por $\vec{X}_0$. En tal caso es fácil comprobar que tal partícula compuesta se mueve libremente con una velocidad constante, dado que en virtud de las ecuaciones de movimiento uno tiene la relación:

$$\ddot{\vec{X}}_0 = 0. \tag{1.16}$$

Si estuviésemos muy lejos de este sistema compuesto de partículas, de hecho sólo podríamos distinguir una única partícula P_0 a velocidad uniforme. Esto revela que nuestro sistema inicial en el cual escribimos las ecuaciones (1.11) efectivamente era inercial.

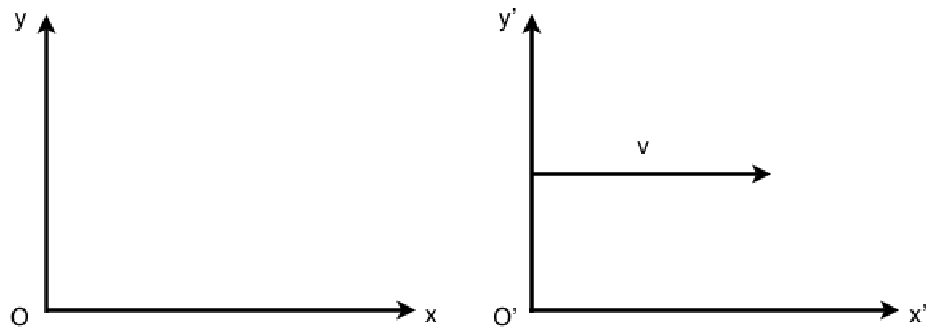
1.4 Principio de la relatividad

Usando como motivación nuestra ley de la relatividad Euclidiana, resulta natural hacer un esfuerzo para extenderla incorporando el concepto más amplio de sistemas de referencia inerciales. La formulación de este principio es de hecho sencillo: *Las leyes de la naturaleza deben poder ser escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia inerciales.* En otras palabras, las ecuaciones de movimiento expresando las leyes de la naturaleza son invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas desde un sistema inercial a otro. Pero ¿Cuáles son las transformaciones correctas relacionando las coordenadas de dos sistemas de referencia inerciales?

1.5 Principio de relatividad Galiliano

Supongamos dos observadores O y O' moviéndose a una velocidad relativa $\vec{v}$ constante. Ambos observadores pueden, por derecho propio, establecer sus sistemas de referencia K y K' con los orígenes centrados en ellos mismos (ver figura). Tales sistemas son, por definición, sistemas de referencias inerciales. La experiencia nos revela que una buena relación matemática entre ambos sistemas de coordenadas K y K' bajo estas circunstancias viene dada por las célebres transformaciones de Galileo. En el caso en que ambos sistemas están convenientemente alineados y la velocidad v de O' relativa a O es en la dirección del eje x, entonces estas transformaciones adquieren la forma sencilla

$$x' = x - vt, \qquad y' = y \qquad z' = z, \tag{1.17}$$



donde por simplicidad, también hemos asumido que en $t = 0$ la posición de ambos observadores es coincidente. Es fácil verificar que si un cuerpo se mueve a velocidad $\vec{u}$ en K, entonces el observador en O' lo registrara en su sistema de referencia K' a una velocidad

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \tag{1.18}$$

La verdadera importancia de las transformaciones de Galileo es que las leyes de Newton son invariantes bajo su acción, en el sentido que dichas leyes son expresadas de forma idéntica en ambos sistemas. Por dicho motivo, resulta natural especificar que el principio de relatividad expresado en 1.4 debe ser complementado con las transformaciones de Galileo. Veremos, sin embargo, que esta actitud es algo apresurada.

1.6 Interacciones

Observemos que las ecuaciones (1.11) poseen una propiedad desconcertante. Si se interviene en el sistema descrito por estas ecuaciones desplazando una de las partículas de su posición, la segunda partícula sentirá dicho efecto en forma instantánea. Esto se debe a que, en general, en mecánica Newtoniana, la fuerza entre partículas puede ser deducida a partir de un potencial de energía, que es función únicamente de las coordenadas de las partículas (más bien de la distancia relativa).

Sin embargo, resulta natural exigir que la interacción entre partículas no sea instantáneo, y que, si algún cambio toma lugar en alguna de las partículas del sistema, influenciará a otras partículas sólo después de un cierto lapso de tiempo. Esto implica la existencia de una velocidad máxima $v_{\max}$ de propagación de interacción.

Dicha velocidad $v_{\max}$ es máxima dado que, si hubiesen partículas o cuerpos que fuesen capaces de exceder tal velocidad, sería posible realizar un proceso incluyendo una interacción con una velocidad mayor a la ya acordada velocidad máxima de interacción. Cuando nos refiramos a interacciones propagándose a tal velocidad, hablaremos de señales.

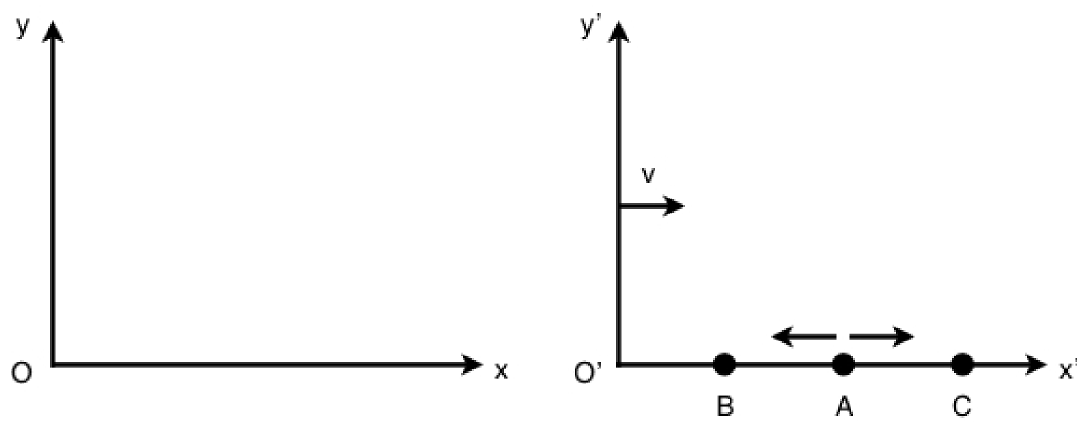
1.7 Principio de relatividad especial de Einstein

Si existe una velocidad máxima de propagación de señales, claramente el principio de relatividad Galiliano no puede ser correcto. En efecto, si las transformaciones de Galileo fuesen correctas, siempre se podría constatar una velocidad mayor que la de las señales mediante el movimiento relativo adecuado. Esto implica que debemos cambiar drásticamente nuestra visión del espacio y del tiempo, puesto que si hemos de persistir con el principio de relatividad expresado en la Sección 1.4, debemos aceptar que la velocidad $v_{\max}$ es universal y registrada de forma idéntica por todos los observadores utilizando sistemas de referencia inerciales para escribir las leyes de la naturaleza. En otras palabras, $v_{\max}$ es necesariamente una constate universal. La velocidad de la luz es un candidato ideal para ser identificada como dicha constante. Más adelante veremos que en efecto este es el caso y, por lo tanto

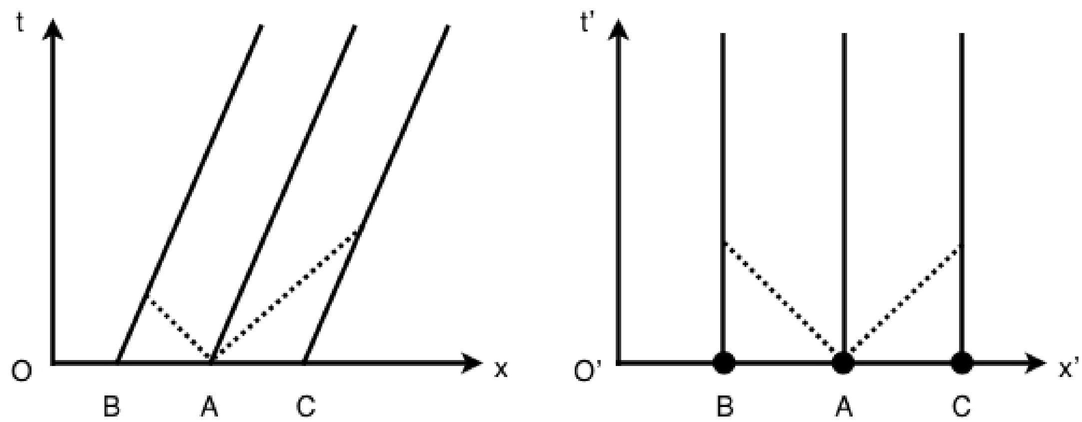
$$v_{\max} = c = 299792\text{Km/s}. \tag{1.19}$$

1.8 Sobre el concepto de simultaneidad

Es posible notar desde ya que ciertas nociones forjadas en el estudio de la mecánica no relativista (Newtoniana) son radicalmente afectadas. Una de ellas es el concepto de simultaneidad. En efecto, supongamos la misma situación descrita por la figura 2.3. Esta vez, sin embargo, el observador O' observa la siguiente situación: Dos señales abandonan una fuente A en reposo con respecto a K' en direcciones opuestas a lo largo del eje x. Dos receptores B y C, también en reposo con respecto a K' se encuentran a la misma distancia de A, y están dispuestos sobre el eje x para interceptar las señales. Desde el



punto de vista de O', claramente ambas señales llegan a B y C en forma simultánea, en tiempos $t'_B = t'_C$. Dado que hemos aceptado que la velocidad de la luz es una constante universal, debemos concluir que el observador O, utilizando su sistema de referencia K para registrar eventos, percibirá que las señales son interceptadas por B y C a tiempos t_B y t_C que no coinciden (ver siguiente figura). Para llegar a esta conclusión no hemos

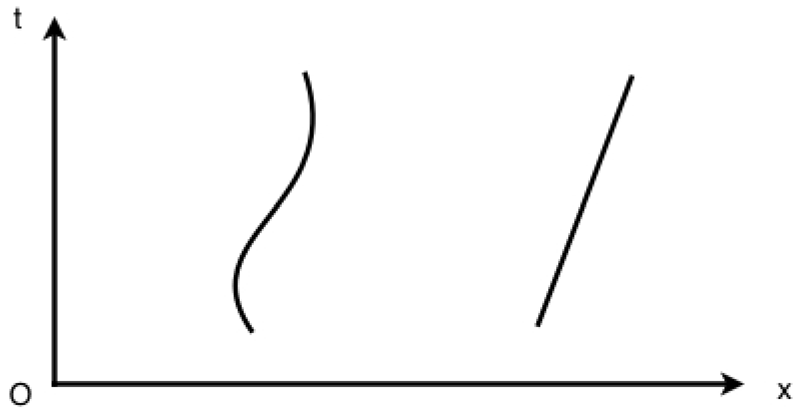


hecho más que aceptar dos principios básicos. Primero, el principio de la relatividad, que establece que las leyes de la naturaleza deben ser escritas en forma idénticas en todos los sistemas inerciales. Y segundo, la existencia de una velocidad máxima de propagación para las interacciones. La combinación de ambos principios es lo que se denomina el principio de relatividad de Einstein.

Es importante señalar, sin embargo, que la Mecánica de Newton no carece de "relatividad" en el mismo sentido profundo del principio de relatividad de Einstein, ya que, como hemos visto, las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo, las que relacionan a observadores en sistemas inerciales. El verdadero cambio conceptual llega a partir de aceptar la existencia de una velocidad máxima de propagación de señales. Históricamente, esto fue posible sólo gracias a un mayor entendimiento de los fenómenos electromagnéticos y la naturaleza ondulatoria de la luz.

1.9 Intervalos espacio-temporales

Evidentemente, para poder entender este tipo de discrepancias debemos reeducar nuestra noción del espacio-tiempo. Para ello resulta conveniente introducir ciertos conceptos básicos que nos serán útiles en el estudio de la relatividad especial. En general, trabajaremos con espacios geométricos donde el tiempo puede ser representado mediante un eje coordenado, al igual que el resto de las coordenadas espaciales (tal como en la figura anterior). En dichos espacios, eventos vienen representados por puntos, caracterizados por coordenadas determinando el tiempo en el que el evento ocurre y las coordenadas espaciales. Por otro lado, una partícula puede ser representada como una sucesión de eventos, siguiendo la trayectoria de la partícula. La curva compuesta por tal sucesión de eventos es denominada línea mundo, y en el caso que la partícula se propague a velocidad constante, la línea mundo corresponde una linea recta en un sistema de referencia inercial.



Ahora bien, supongamos dos eventos P_1 y P_2 arbitrarios. En general, dado un sistema inercial K, podremos asignar a estos eventos coordenadas espacio-temporales (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) respectivamente. Definamos al intervalo espacio temporal Δs^2 entre ambos eventos de la siguiente forma:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{1.20}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta z = z_2 - z_1$. Por otro lado, en otro sistema inercial K' estos eventos vendrán descritos por las coordenadas espacio-temporales (t_1', x_1', y_1', z_1') y (t_2', x_2', y_2', z_2') respectivamente, por lo que podemos definir una cantidad similar en términos de las coordenadas de K':

$$(\Delta s')^2 = -c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \tag{1.21}$$

donde $\Delta t = t_2' - t_1'$, $\Delta x = x_2' - x_1'$, $\Delta y = y_2' - y_1'$ y $\Delta z = z_2' - z_1'$. Supongamos por un momento que ambos eventos están separados por un intervalo espacio-temporal caracterizado por $\Delta s^2 = 0$. La ecuación $\Delta s^2 = 0$ corresponde ni más ni menos que a una curva rectilínea en la cual una señal se propaga desde P_1 a P_2 a la velocidad de la luz. Sin embargo sabemos que la propagación de una señal es registrada en todos los sistemas de referencia con la misma velocidad (ya que corresponde a la velocidad universal máxima). Por lo tanto, si $\Delta s^2 = 0$ en K, necesariamente uno debe registrar $(\Delta s')^2 = 0$ en K'. En otras palabras $(\Delta s)^2 = 0$ y $(\Delta s')^2 = 0$ son equivalentes. Noten que ésta conclusión es completamente independiente de la orientación relativa de los ejes, o desplazamiento del origen de ambos sistemas, uno con respecto a otro.

Preguntemonos ahora cómo están estos intervalos, escritos en distintos sistemas inerciales, relacionados para eventos P_1 y P_2 arbitrarios (es decir, no necesariamente conectados por señales). Para ello, consideremos primero el caso en que tales eventos están infinitesimalmente cerca el uno del otro. En tal caso nos permitimos escribir el intervalo espacio-temporal en forma infinitesimal

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.22}$$

Claramente, si la separación de dos eventos es infinitesimal en K, también lo debe ser en K'. De modo que la única relación entre ds y ds' aceptable es una relación lineal de la forma:

$$ds = ads'. \tag{1.23}$$

Observen que ninguna otra cantidad infinitesimal puede entrar en esta relación, dado que para $ds' = 0$ sabemos que debemos invariablemente reobtener $ds = 0$. Más aún, el coeficiente a sólo puede depender del valor absoluto de la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En efecto, observen primero que a no puede depender ni de las coordenadas espaciales ni del tiempo, de otro modo distintos puntos en el tiempo y en el espacio no serían equivalentes. En forma similar, a tampoco puede depender de la dirección de la velocidad relativa, pues eso introduciría una anisotropía del espacio al momento de describir la relación entre ambos eventos[1]. Noten que en total analogía, pudimos haber escrito

$$ds' = ads, \tag{1.24}$$

donde a es precisamente la misma función. Por lo tanto podemos deducir que $a = \pm 1$. Notemos sin embargo que un caso particular corresponde a aquel en que $v = 0$, en cuyo caso debemos reobtener $ds = ds'$. Por dicho motivo, debemos concluir que $a = 1$ y en general:

$$ds = ds'. \tag{1.25}$$

Dado que hemos supuesto homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, este resultado puede ser extendido a intervalos finitos

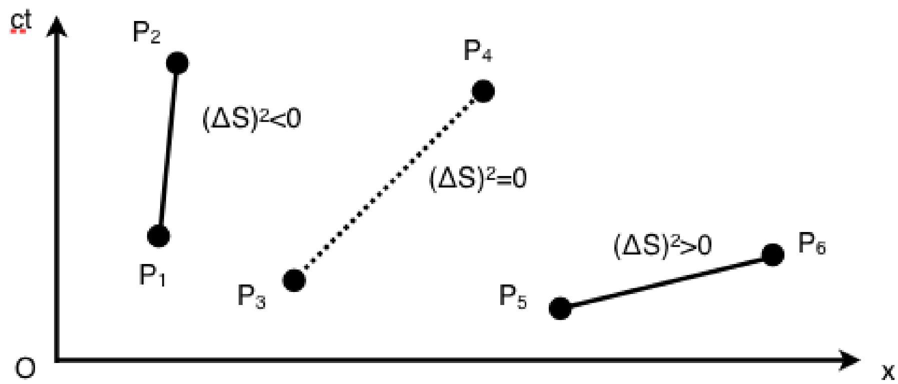
$$\Delta s = \Delta s'. \tag{1.26}$$

[1]Resulta útil pensar en estas dos reglas para el caso ya conocido que consideramos en la sección 1.1. Ahí bien pudimos haber deducido que el intervalo espacial $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dy^2$ está relacionado al intervalo $dr'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dy'^2$ mediante una relación lineal de la forma $dr = adr'$. En tal caso resulta natural entender por qué a no puede depender ni de las coordenadas ni de los ángulos de la matriz de rotación R, por exactamente las mismas razones

De esta forma, hemos llegado a un resultado crucial: El intervalo espacio-temporal Δs^2 caracterizando dos eventos arbitrarios es una cantidad invariante en todos los sistemas de referencia inerciales.

1.10 Variedades de intervalos

Noten que existen tres categorías de intervalos espacio temporales, dependiendo del signo. Aquellos eventos que están separados por intervalos $\Delta s^2 < 0$ se dicen separados por un intervalo tipo tiempo. Por otro lado, eventos cuya separación esta caracterizada por $\Delta s^2 = 0$, se dicen separados por un intervalo tipo luz. Finalmente, dos eventos caracterizados una separación $\Delta s^2 > 0$, se dicen separados por un intervalo tipo espacio. Para graficar estas tres situaciones, resulta muy conveniente dibujar el eje temporal multiplicado por c. En tal caso, si nos enfocamos por conveniencia solamente en el plano (x, t), los intervalos tipo luz corresponden a curvas rectilíneas siempre en 45^0. La siguiente figura muestra los tres tipos de intervalos.



1.11 Cono de luz

Un concepto importante en relatividad especial es aquel del "cono de luz". Supongamos un evento P_1 con coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y visualicemos la superficie definida por el conjunto de todos los eventos $P = (t, x, y, z)$ tales que:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0, \tag{1.27}$$

donde $\Delta t = t - t_1$, $\Delta x = x - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ y $\Delta z = z - z_1$. A esta superficie se le denomina el cono de luz, ya que toda línea mundo uniendo a P_1 con un evento P sobre la superficie, corresponde a la trayectoria que describiría un rayo de luz. La siguiente figura muestra como se vería el cono si nos despreocupamos del eje z. Observen que cualquier evento $P = (t, x, y, z)$ tal que $\Delta s^2 < 0$ (a una distancia tipo tiempo de P_1) necesariamente está dentro del cono, mientras que si es tal que $\Delta s^2 > 0$ (a una distancia tipo espacio de P_1) necesariamente está fuera del cono.

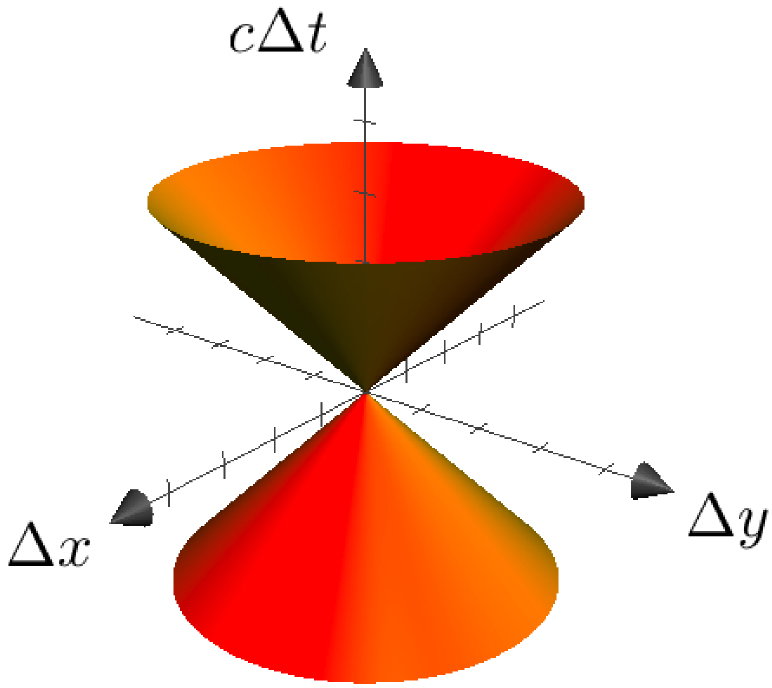


Figure 1: La figura muestra la superficie $\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0$ proyectada sobre el plano (ct, x, y). Esta superficie es denominada cono de luz.

2 Transformaciones de Lorentz

Ahora procedemos a deducir y estudiar las celebres transformaciones de Lorentz, relacionando sistemas de referencia inerciales para observadores en movimiento relativo uniforme.

2.1 Tiempo propio

Antes de deducir las transformaciones de Lorentz, resulta útil introducir un concepto fundamental en el estudio de la cinemática relativista. Supongamos un observador inercial O junto a su sistema de referencia K. Por definición, este observador verá partículas libres en movimiento uniforme y rectilíneo. Supongamos en particular una partícula con velocidad $\vec{v}$ con respecto a O. Ya sabemos que si dicha partícula es física (real), entonces $v < c$ y su línea de mundo debe ser tipo tiempo. Es decir, cualquier par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo deben estar separados por un intervalo espacio-temporal tal que

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < 0. \tag{2.1}$$

Más aún, dado que el movimiento es rectilíneo, tendremos que la la velocidad de la partícula satisface

$$v^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2. \tag{2.2}$$

Por otro lado, debe existir un sistema inercial K' donde dicha partícula se registra en reposo. Esto significa que para el mismo par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo éstos estarán caracterizados en K' por $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$ y $\Delta z' = 0$. Tendremos por lo tanto la relación

$$-c^2(\Delta t')^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{2.3}$$

Noten que t' es la coordenada utilizada para medir el tiempo en el sistema de referencia en reposo con respecto a la partícula en cuestión y por lo tanto corresponde al tiempo percibido por la partícula. Es más, si reemplazásemos a la partícula por un reloj, este sería precisamente el tiempo indicado por dicho reloj, al ser observado por O. Por lo tanto, nos referiremos a este tiempo como el *tiempo propio* τ de la partícula. Notemos que un cierto periodo *propio* $\Delta\tau = \Delta t'$ viene relacionado con un periodo de tiempo medido por un reloj en K de la siguiente forma

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta t)^2}{c^2}\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right], \tag{2.4}$$

y por lo tanto, podemos escribir $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Esto quiere decir que el tiempo de un reloj en movimiento es percibido por un observador O pasando en forma más lenta que aquel registrado por su reloj

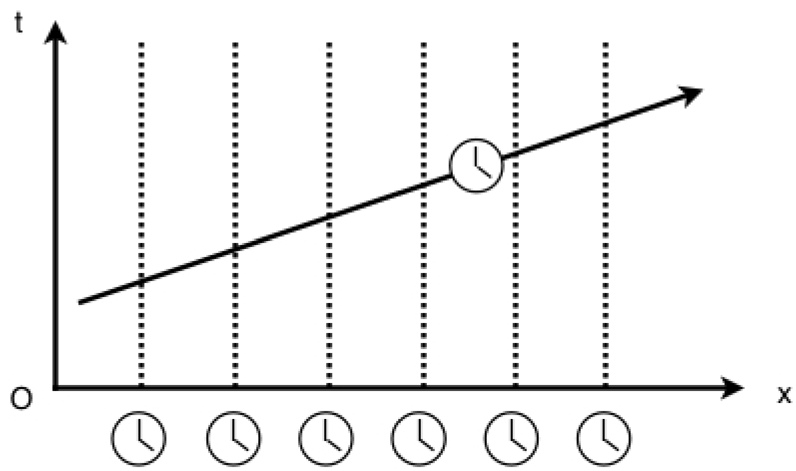
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.5}$$

2.2 Sobre el concepto de medición

Hay algo que a primera vista resulta extraño en la conclusión anterior. Supongamos que en vez de una partícula en movimiento rectilíneo uniforme tenemos un observador O' con un reloj. Este, al observar O moviéndose a una velocidad $-\vec{v}$ con respecto a si mismo habría deducido, correctamente, que el tiempo propio de O transcurre de forma más lenta que aquel que marca su reloj. De hecho el constataría que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.6}$$

donde Δt es ahora el intervalo de tiempo propio de O. En otras palabras, ambos observadores perciben que el reloj del observador contrario marca el tiempo a intervalos regulares mas lentos que el suyo. ¿Cómo podemos explicar esta aparente contradicción? Para responder a esta pregunta debemos aclarar el concepto de medición. De hecho, hay cierta asimetría en la labor de medir y comparar relojes. Para ser más precisos, y volviendo al caso anterior de la Sección 2.1, si el observador O deseara medir el tiempo propio de un reloj en movimiento rectilíneo y uniforme, estará obligado a construir un arreglo de relojes, todos calibrados, y ubicados en distintos puntos espaciales de su sistema de referencia (ver figura). En otras palabras, el observador requiere construir un



arreglo de relojes consistente con su sistema de referencia para comparar el tiempo con el reloj en movimiento. Hay por lo tanto una asimetría inevitable al momento de intentar comparar relojes. Lo mismo ocurre si ahora reemplazamos al reloj por un observador O' y éste desease comparar como evoluciona el tiempo marcado por el reloj de O con sus sistema de referencia.

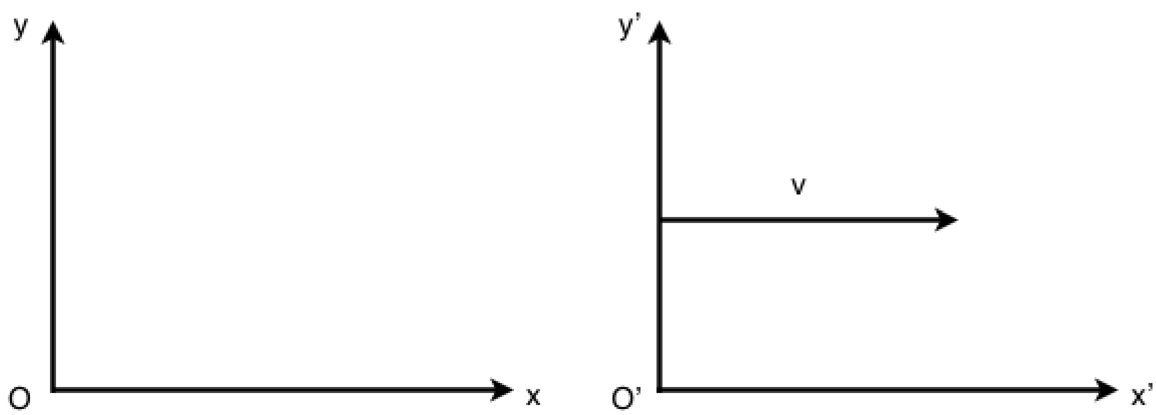
2.3 Transformaciones de Lorentz

Supongamos dos observadores O y O' con una velocidad relativa entre ambos dada por v. Ambos observadores estarán tentados en utilizar sus propios diagramas espacio-temporales (sistemas de referencia) para ubicar eventos. Por dicho motivo distinguimos entre los sistemas de referencias K y K' caracterizados por coordenadas (t, x, y, z) y (t', x', y', z') respectivamente. En la clase anterior vimos que, sin importar la orientación de los ejes, o desplazamiento del origen de dichos sistemas, dado dos eventos arbitrarios P_1 y P_2, existe una cantidad invariante, denominada el intervalo espacio-temporal Δs^2, dada por

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2,\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, etc... Es deseable contar con una transformación matemática relacionando directamente a las coordenadas de ambos sistemas que cumplan con la propiedad de mantener $(\Delta s)^2$. Al igual que con las rotaciones que vimos en la Sección 1.1, estas transformaciones deben ser relaciones lineales entre las diferencias $(\Delta t, \Delta \vec{x})$ y $(\Delta t', \Delta \vec{x}')$. Esto es evidente, pues buscamos mantener invariante una cantidad que es cuadrática en la diferencia de coordenadas.

En general estas transformaciones son complicadas (las deduciremos en su forma general un poco más adelante) pero podemos simplificar el problema de deducirlas si acordamos que ambos observadores tienen sus sistemas de referencia con los ejes espaciales alineados y que el movimiento relativo es a lo largo del eje x, tal como lo muestra la figura. Partamos



considerando la existencia de dos eventos P_1 y P_2 ubicados en el plano (t, x) de K. Estos eventos están caracterizados por un intervalo $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$. Evidentemente estos eventos continuarán siendo registrados en el plano (t', x') en K', por lo que sólo debemos considerar la invariancia del intervalo $(\Delta s')^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2$. Tenemos pues

$$-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2. \tag{2.8}$$

Para deducir las transformaciones lineales teniendo lugar entre las coordenadas de ambos sistemas usemos el siguiente truco. Notemos que al escribir $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$, la expresión anterior puede ser reexpresada de la forma

$$(\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 = (\Delta\eta')^2 + (\Delta x')^2. \tag{2.9}$$

Esta expresión es de hecho conocida. Corresponde ni más ni menos que al intervalo invariante bajo rotaciones en el plano (η, x) examinado en la Sección 1.1. Para tal situación sabemos bien cuales son las transformaciones entre coordenadas. Estas son

$$\Delta\eta' = -\Delta\eta \sin\theta + \Delta x \cos\theta, \qquad \Delta x' = \Delta x \cos\theta + \Delta\eta \sin\theta, \tag{2.10}$$

mientras que sus inversas vienen dadas por

$$\Delta\eta = \Delta\eta' \sin\theta + \Delta x' \cos\theta, \qquad \Delta x = \Delta x' \cos\theta - \Delta\eta' \sin\theta. \tag{2.11}$$

Para entender el significado de θ en este caso, consideremos la linea de mundo de una partícula en reposo en el sistema K'. Desde la perspectiva de O, esta partícula se mueve a una velocidad v y sigue un movimiento rectilíneo. Supongamos que los eventos P_1 y P_2 interceptan el paso de esta partícula. Luego, tendremos $\Delta x/\Delta t = v$. Desde la perspectiva de O', los dos eventos P_1 y P_2 están caracterizaos por $\Delta x' = 0$, dado que la partícula no se desplaza en su sistema de coordenadas. Por lo tanto, tenemos

$$\Delta\eta = \Delta\eta' \sin\theta, \qquad \Delta x = -\Delta\eta' \sin\theta. \tag{2.12}$$

Dividiendo la segunda relación por la primera, tenemos

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -ic\tan\theta. \tag{2.13}$$

Es decir, θ esta directamente relacionado con la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En virtud de esta última relación, podemos escribir

$$\sin\theta = \frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.14}$$

Volviendo a las ecuaciones (2.11), y reescribiendo $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$ deducimos finalmente las transformaciones de Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.15}$$

Para deducir las relaciones inversas, podemos invertir directamente las relaciones lineales anteriores, o alternativamente, recordar que ellas son deducidas del mismo razonamiento anterior pero con v reemplazado por $-v$. Estas vienen dadas por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.16}$$

Es fácil comprobar que en efecto $(\Delta s)^2$ es un invariante bajo estas transformaciones. Terminemos esta sección señalando que si los eventos P_1 y P_2 están adicionalmente separados por componentes Δy y Δz perpendiculares al eje x, donde el movimiento relativo entre los observadores se realiza, entonces éstas no sufrirán cambios bajo las transformaciones. En otras palabras

$$\Delta y = \Delta y', \qquad \Delta z = \Delta z'. \tag{2.17}$$

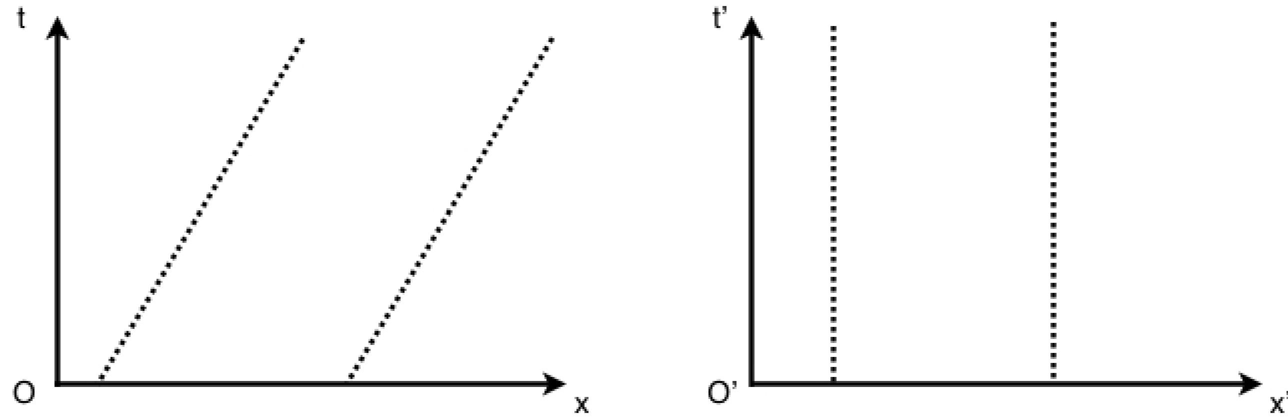
Para convencerse de esto podemos volver a la notación auxiliar mediante la cual escribimos $ic\Delta t = \Delta\eta$. En tal caso tenemos $(\Delta s)^2 = (\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Este intervalo es invariante bajo rotaciones en un espacio de cuatro dimensiones. Sin embargo, ya vimos que si el movimiento entre los sistemas de referencia es a lo largo del eje x, la transformación entre ambos sistemas equivale a una rotación en el plano (η, x). Tal rotación en efecto deja sin modificación a las cantidades Δy y Δz.

2.4 Longitud propia

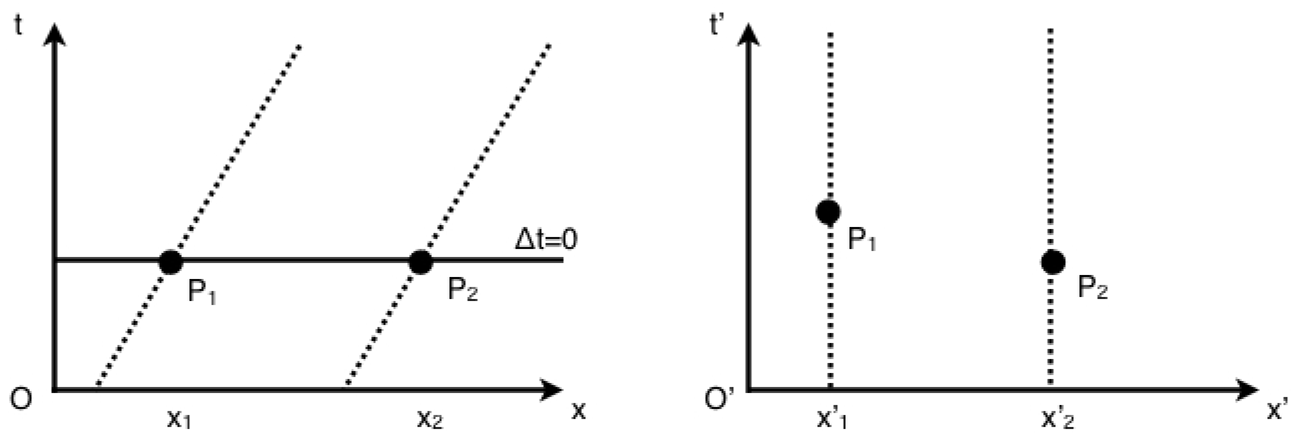
Como primera aplicación de las transformaciones de Lorentz, discutamos la medición del largo de un objeto extendido en movimiento, por ejemplo una barra. Supongamos que contamos con una barra *rígida* que en reposo mide ℓ_0. Dado que este es el largo medido en un sistema de referencia donde la barra está en reposo, nos referiremos a éste como el *largo propio* de la barra. Supongamos ahora que la misma barra está en movimiento, con una velocidad constante v con respecto a un observador O, y en una dirección que coincide con el largo de la barra. Como es costumbre, alineemos la dirección del movimiento (y del largo) con el eje x del sistema de referencia K utilizado por O para registrar eventos. En dicho sistema de referencia, O podrá constatar que la barra cubre una región de dos dimensiones en el plano (x, t) delimitada por dos *líneas mundo* denotando los extremos de la barra (ver siguiente figura). Es usual denominar a tal región como *sabana mundo*. Es conveniente pensar en los extremos de la barra como partículas. Dado que la barra pretende ser un objeto físico, los extremos de la barra deben seguir lineas de mundo tipo tiempo (recuerden la discusión de la Sección 1.10). En el presente caso, el observador O claramente verá los extremos de la barra en movimiento rectilíneo uniforme, a velocidad v. Por otro lado un observador O' en reposo con respecto a la barra, pero a velocidad v con respecto a O, verá que los extremos de la barras corresponden a líneas mundo completamente verticales en el plano (x', t') de su sistema de referencia, la primera en x'_1 y la segunda en x'_2. Para el observador O', la diferencia de las coordenadas corresponde a ℓ_0, es decir

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \ell_0. \tag{2.18}$$

Para establecer la medición del largo de la barra que hace O, debemos primero acordar que para éste, la medición del largo de un objeto extendido se hace en forma simultánea.



Es decir, el observador O debe registrar la posición de los extremos de la barra a tiempos iguales. Por lo tanto, para él, el largo de la barra consistirá a la distancia espacial entre dos eventos P_1 y P_2 caracterizados por $\Delta t = 0$ (ver siguiente figura). Utilizando (2.18) y



la segunda ecuación de (2.16), vemos pues que

$$\Delta x = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2.19}$$

Dado que $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, vemos que el largo medido por O es menor que el largo propio de la barra. A esto se le denomina contracción de Lorentz. Notemos que la forma en que hemos deducido este resultado fue asociando a los extremos de la barra lineas de mundo, y asociando dos eventos P_1 y P_2 a la intersección de estas líneas de mundo con una curva a t =constante. Para O, estos eventos son simultáneos, que es la única forma que el o ella puede medir longitudes (piensen bien esto!). Por otra parte, estos eventos no serán simultáneos para un observador O' en reposo con respecto a la barra (ver figura anterior). De hecho la primera ecuación (2.16) nos dice que si bien P_1 y P_2 están separados por una distancia $\Delta x' = \ell_0$ en K', también son registrados por O' a destiempo:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -\frac{v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -v\ell_0/c^2, \tag{2.20}$$

donde hemos usado (2.19) en la segunda igualdad. Este es quizás el aspecto más característico de la relatividad especial, es decir, el que no exista una forma absoluta de definir simultaneidad. Aquellos eventos que ocurren en forma simultánea para un observador inercial O no serán observados como simultáneos para un observador O' en movimiento con respecto a O.

Para terminar, observen que en el cálculo anterior necesitamos especificar si el origen de ambos sistemas de referencia coinciden o no. Es decir, no fue necesario acordar que los relojes utilizados en ambos sistemas de referencia están sincronizados de tal forma que para $(t, x) = (0, 0)$ uno tiene $(t, x) = (0, 0)$, lo que es utilizado en muchos textos. De hecho, en general tal convención es completamente irrelevante para resolver problemas en relatividad especial, ya que nuestro interés es típicamente describir la relación entre dos o mas eventos, en donde intervienen diferencias de coordenadas, y no la ubicación de los orígenes de los sistemas de referencia.

2.5 Notación β y γ

En ocasiones resulta útil introducir dos parámetros β y γ para simplificar la escritura de las transformaciones de Lorentz. Estos son:

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{2.21}$$

Teniendo en cuenta estos parámetros, las transformaciones de Lorentz pueden ser reexpresadas como

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x'), \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t'), \tag{2.22}$$

(donde hemos omitido las relaciones adicionales $\Delta y = \Delta y'$ y $\Delta z = \Delta z'$) mientras que sus inversas son

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x), \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t). \tag{2.23}$$

Noten también que por conveniencia hemos multiplicado por c en ambos lados, de modo que Δt y $\Delta t'$ siempre vienen acompañados del factor c.

2.6 Adición de velocidades

Claramente podemos repetir la deducción de las transformaciones de Lorentz para el caso en que dos eventos P_1 y P_2 están infinitesimalmente separados. En tal caso las transformaciones de Lorentz adquieren la forma

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \tag{2.24}$$

junto a las relaciones $dy = dy'$ y $dz = dz'$. Supongamos ahora que nuestro observador O constata una partícula en movimiento a velocidad u a lo largo del eje x. El movimiento de dicha partícula satisface

$$u = \frac{dx}{dt}. \tag{2.25}$$

Supongamos ahora que un segundo observador O' se mueve a velocidad v con respecto a O, también a lo largo del eje x (es decir $dy = dz = 0$). El observador O' observara la trayectoria de la partícula caracterizada por los infinitésimos dx' y dt' y por lo tanto observará una velocidad

$$u' = \frac{dx'}{dt'}. \tag{2.26}$$

Es posible obtener una relación de adición de velocidades involucrando las cantidades u y u'. Para obtenerla, dividamos la segunda relación en (2.31) por la primera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c\,dt'}{dt' + \beta dx'/c} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}. \tag{2.27}$$

Esta relación nos permite finalmente obtener

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \tag{2.28}$$

que es la relación deseada. También es posible invertir esta relación para obtener u' en términos de u. Es posible obtener tal relación ya sea invirtiendo directamente la relación anterior, o simplemente recordando que el mismo razonamiento para deducir la regla puede ser repetido pero invirtiendo el rol de los observadores mediante $v \to -v$

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \tag{2.29}$$

Comparen esta última relación con la regla Galiliana para la adición de velocidades (1.18) examinada en la primera cátedra. Noten que si la velocidad de propagación de señales fuese infinita ($c \to +\infty$) reobtendríamos la regla Galiliana, lo que es consistente con nuestra discusión sobre la instantaneidad de las interacciones.

2.7 Algo más sobre adición de velocidades

Retomemos el último resultado de la clase anterior. Recordemos que dedujimos la regla de adición de velocidades asumiendo que la partícula en cuestión se movía a lo largo del mismo eje en el cual los observadores O y O' presentan un movimiento relativo. Supongamos ahora que la partícula tiene componentes perpendiculares al eje x. Es decir, la velocidad de la partícula corresponde a un vector $\vec{u}$ con componentes

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}. \tag{2.30}$$

Las transformaciones de Lorentz nos dicen que los infinitesimales dt, dx, dy, dz asociados al movimiento de la partícula en el sistema de referencia K están relacionados con los infinitesimales dt', dx', dy', dz' en el sistema de referencia K' (utilizado por un observador O' en movimiento con respecto a O con velocidad v a lo largo del eje x) en la forma siguiente:

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'. \tag{2.31}$$

Repitiendo el calculo hecho en la última sección de la clase anterior, pero ahora teniendo en cuenta las componentes a lo largo de los ejes y y z, obtenemos

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \tag{2.32}$$

Por otro lado, las relaciones inversas, corresponden a

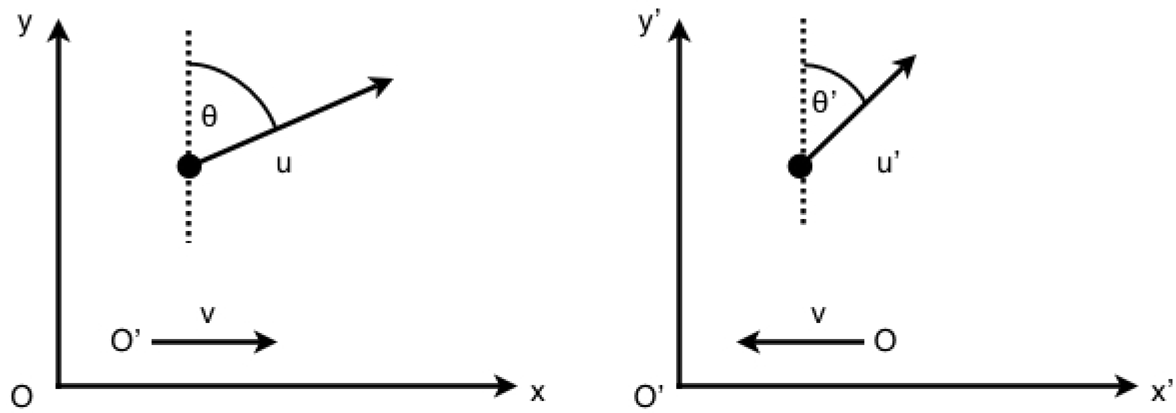
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \tag{2.33}$$

Es decir, las componentes transversales al movimiento relativo de ambos observadores, son registrados por ambos observadores en forma distinta en sus sistemas K y K' respectivos.

2.8 Aberración de la luz

Como aplicación del resultado anterior, analicemos una situación relevante para la astronomía. Supongamos primero que la partícula de nuestro ejemplo anterior tiene una velocidad $\vec{u}$ caracterizada solo por componentes a lo largo del plano $x - y$. Debido a las relaciones anteriores, sabemos que la partícula también se constatará moviéndose en el plano $x' - y'$ por el observador O' pero con componentes distintas. En los dos sistemas de referencia K y K' podemos descomponer la velocidad de la partícula en sus componentes de la siguiente manera (ver figura siguiente)

$$u_x = u \sin\theta, \qquad u_y = u\cos\theta, \qquad u'_x = u'\sin\theta', \qquad u'_y = u'\cos\theta'. \tag{2.34}$$



Debería ser claro que en general $u' \neq u$ y $\theta' \neq \theta$ (esto también es cierto en mecánica Newtoniana, utilizando las transformaciones de Galileo). Utilizando las relaciones (2.32), podemos entonces deducir

$$u \sin\theta = \frac{u' \sin\theta' + v}{1 + vu' \sin\theta'/c^2}, \qquad u \cos\theta = \frac{u' \cos\theta' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu' \sin\theta'/c^2}. \tag{2.35}$$

Dividiendo ahora la primera ecuación por la segunda obtenemos entonces

$$\tan\theta = \frac{u' \sin\theta' + v}{u' \cos\theta' \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.36}$$

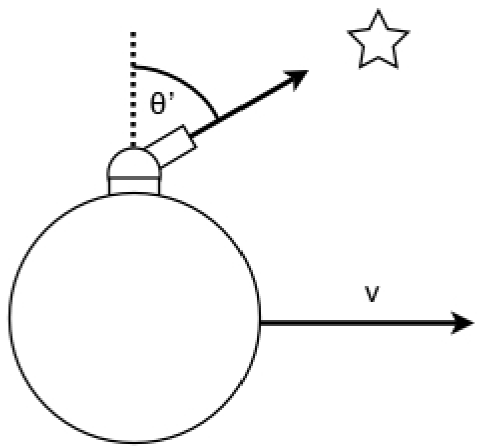
Esta es una relación interesante. Nos entrega el ángulo θ medido en K como función de la velocidad u' y el ángulo θ' medidos en K'. Noten que la única diferencia con el resultado deducido a través del uso de las transformaciones de Galileo es el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ multiplicando el lado derecho. Como ya es habitual, si quisiéramos obtener la relación inversa, ahora entre el ángulo θ' medido en K' y u y el ángulo θ medidos en K, simplemente debemos invertir el rol de todas las cantidades y cambiar $v \to -v$:

$$\tan\theta' = \frac{u \sin\theta - v}{u \cos\theta \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.37}$$

El caso que nos interesa es aquel en que la partícula corresponde a un fotón (un *cuanto* de luz). En tal caso, dado que la velocidad de la luz es universal, debemos usar $u = u' = c$. Remplazando estas cantidades en la relación (2.37), obtenemos finalmente

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta - \beta}{\cos\theta \sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{2.38}$$

donde $\beta = v/c$. Esta es la ecuación relativista para la aberración de la luz. Pensemos ahora en una situación cotidiana. Supongamos que estamos interesados en observar una estrella determinada y para ello contamos con las coordenadas de la estrella utilizadas para la observación de la misma seis meses atrás. La ecuación anterior nos señala que debemos realizar una corrección al ángulo θ de nuestro telescopio con relación al eje en el cual la tierra se mueve (ver figura). Dado que la estrella se encuentra muy distante,



para cualquier efecto el movimiento de esta no es del todo relevante para este problema, por lo que lo importante es la velocidad relativa de la tierra con respecto a su velocidad seis meses atrás. Llamemos a esta cantidad v. Para calcular la corrección que debemos aplicara a nuestro telescopio para observar la estrella, constatemos primero que para $\beta = 0$ (es decir $v = 0$) tendremos $\theta' = \theta$. Esto quiere decir que para pequeñas velocidades $v \ll c$ tendremos pequeñas correcciones al ángulo modificando la relación $\theta' = \theta$. Definamos por lo tanto $\Delta\theta$ de la forma

$$\theta' = \theta + \Delta\theta. \tag{2.39}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (2.38) y expandiendo ambos lados linealmente en $\Delta\theta$ y β (que son pequeñas), obtenemos

$$\tan\theta + \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) = \tan\theta - \frac{\beta}{\cos\theta} + \mathcal{O}(\beta^2). \tag{2.40}$$

Luego, despreciando las cantidades cuadráticas, obtenemos

$$\Delta\theta \simeq -\frac{v}{c}\cos\theta. \tag{2.41}$$

Esta ecuación nos entrega la corrección que debemos considerar para orientar un telescopio en el cielo. Vale mencionar que esta relación fue deducida antes de la llegada de relatividad especial, y fue utilizada para medir estimar la velocidad de la luz.

4 Transformaciones de Lorentz II

Continuemos profundizando nuestro entendimiento de las transformaciones de Lorentz. Resulta conveniente introducir una notación que persistirá a lo largo de este curso. Observemos que en todo momento hemos tenido que lidiar con la combinación ct en lugar de solamente t. Esto se debe a que las transformadas de Lorentz intercambian coordenadas temporales por espaciales (y vice versa) por lo que necesitamos una cantidad con unidades de velocidad para realizar dicho intercambio. Por supuesto, dicha velocidad es precisamente la luz, que tiene un rol universal. Definamos entonces nuevas coordenadas $\bar{t}$ y $\bar{x}$ exclusivamente con unidades de longitud:

$$\bar{t} \equiv ct, \qquad \bar{x} \equiv x. \tag{4.1}$$

Claramente esta definición es redundante para x. Observen que si bien $\bar{t}$ tiene unidades de longitud, en realidad mide el tiempo. Diremos entonces que podemos medir longitudes haciendo referencia al tiempo (y vice versa). Por ejemplo, la distancia de la estrella más cercana (Próxima Centauri) es de 4.24 años luz. Lo que en términos de Kilómetros significa

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{t} &= c \times (4.24 \times 3.15 \times 10^7 \mathrm{s}), && (4.2)\\
&= 2.99 \times 10^8 \times 4.24 \times 3.15 \times 10^7 \mathrm{Km} && (4.3)\\
&= 39.93 \times 10^{15} \mathrm{Km}. && (4.4)
\end{aligned}$$

Ahora las transformaciones de Lorentz pueden ser escritas de la forma:

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{t} &= \gamma(\Delta\bar{t}' + \beta\Delta\bar{x}'), && (4.5)\\
\Delta\bar{x} &= \gamma(\Delta\bar{x} + \beta\Delta\bar{t}'). && (4.6)
\end{aligned}$$

Supongamos que nos interesa describir la trayectoria de una señal de luz $\frac{dx}{dt} = c$. Luego, en las nuevas coordenadas la velocidad de la luz viene dada por

$$\bar{c} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{c}{c} = 1. \tag{4.7}$$

Es decir, con estas nuevas unidades la velocidad universal límite es simplemente 1. La conveniencia de trabajar con estas coordenadas es precisamente esta, que las velocidades no tienen unidades, ya que se miden con respecto a la velocidad de la luz. Por ejemplo, una partícula que se mueve con velocidad $\frac{dx}{dt} = v$ en el sistema de unidades antiguas, descritas con las nuevas unidades lo hará a una velocidad:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c} = \beta. \tag{4.8}$$

A partir de ahora continuaremos trabajando con estas nuevas unidades. Dado que la notación con barras es redundante, simplemente usaremos el par t y x, y aceptaremos que $c = 1$. Esto es, simplemente trabajaremos en un sistema de unidades donde $c = 1$.

4.1 Transformaciones de Lorentz como rotaciones

Dada que las transformaciones de Lorentz corresponden a una relación lineal entre las diferencias de coordenadas (t, x) y (t', x'), las expresiones anteriores pueden ser reexpresadas de la forma

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Noten que la inversa de la matriz usada en la última expresión es precisamente la misma matriz pero con $\beta \to -\beta$. En otras palabras, las relaciones inversas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Noten que estas matrices dependen únicamente de un parámetro, es decir $\beta = v$. De hecho resulta conveniente parametrizar estas matrices introduciendo el siguiente parámetro θ (no confundir con el ángulo usado en la Sección anterior)

$$\tanh\theta = \beta. \tag{4.11}$$

Dado que $-1 < \beta < 1$, la relación anterior corresponde a un mapa de uno a uno entre v y $\theta \in \mathbb{R}$. Observen adicionalmente que, dada la definición anterior, podemos escribir:

$$\gamma = \cosh\theta, \qquad \gamma\beta = \sinh\theta. \tag{4.12}$$

La transformación (4.9) puede ahora ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

mientras que la transformación inversa (4.10) puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{-1}(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

En la expresión anterior Λ^{-1} corresponde a la inversa de Λ. Es decir $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1$. Noten que la matriz $\Lambda(\theta)$ satisface varias propiedades interesantes. Primero que nada $\Lambda^{-1}(\theta) = \Lambda(-\theta)$. Más aún, en general, para dos valores θ_1 y θ_2 arbitrarios, las matrices $\Lambda(\theta_1)$ y $\Lambda(\theta_2)$ satisfacen (verifiquen esto):

$$\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2). \tag{4.15}$$

Este último resultado es de hecho muy sugerente: Dos transformaciones de Lorentz aplicadas sucesivamente, caracterizadas por parámetros θ_1 y θ_2 respectivamente, corresponde a una sola transformación de Lorentz caracterizada por un parámetro $\theta_1 + \theta_2$. Analicemos esto en más detalle. Supongamos tres observadores O, O' y O'' utilizando, como es habitual, sistemas de referencia K, K' y K'' para registrar eventos. Supongamos que la velocidad de O' con respecto a O es v, a lo largo del eje x, y que la velocidad de O'' con respecto a O' es u, también a lo largo del eje x. Dada la presente situación, sabemos bien que existen transformaciones de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K, y K' por O y O' respectivamente. Estas son:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1) \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \theta_1 \equiv \text{arctanh}(v). \tag{4.16}$$

Por otro lado, existen transformaciones de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K', y K'' por O' y O'' respectivamente. Estas son:

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} \Delta t'' \\ \Delta x'' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \theta_2 \equiv \text{arctanh}(u). \tag{4.17}$$

Juntando ambas ecuaciones podemos pues deducir

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} \Delta t'' \\ \Delta x'' \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1 + \theta_2) \begin{pmatrix} \Delta t'' \\ \Delta x'' \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Por lo tanto, $\Lambda(\theta_1 + \theta_2)$ corresponde a la transformación de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K, y K''. Noten que, por definición, el parámetro $\beta = u''/c$ asociando a esta transformación satisface $\beta = \tanh(\theta_1 + \theta_2)$. De hecho, es posible constatar la siguiente relación trigonométrica

$$\tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2}. \tag{4.19}$$

De este modo, al hacer los reemplazos $\tanh\theta_1 = v$, $\tanh\theta_2 = u$ y $\tanh(\theta_1 + \theta_2) = u''$, obtenemos

$$u'' = \frac{u + v}{1 + vu/c^2}, \tag{4.20}$$

que es precisamente la regla de adición de velocidades obtenida anteriormente.

4.2 Calibrando los orígenes

Hasta el momento hemos estudiado las transformaciones de Lorentz actuando sobre diferencias de coordenadas caracterizando dos eventos arbitrarios P_1 y P_2 en el espacio tiempo. Por simplicidad, en este análisis hemos utilizado sistemas de referencia inerciales con ejes convenientemente alineados. Es decir, hemos convenido en que si hay dos observadores inerciales O y O' en movimiento relativo, entonces el observador O usa un sistema de referencia K en el cual el observador O' se mueve en la dirección positiva de su eje x, mientras que el observador O' usa un sistema de referencia K' en el cual el observador O se mueve en la dirección negativa de su eje x'.

Por otro lado, en ningún momento nos hemos visto en la necesidad de hacer coincidir los orígenes de ambos sistemas de referencia. Esto debido al hecho que estamos describiendo diferencias de coordenadas, por lo que poco importa donde están centrados los orígenes. Sin embargo, nada nos impide en convenir que ambos sistemas de referencias están calibrados, de modo que el evento $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ en K coincide con el evento $(t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ en K'. Al convenir esto, un evento arbitrario P con coordenadas (t'_P, x'_P, y'_P, z'_P) relativas al origen (0,0,0,0) en K' estará registrado con coordenadas (t_P, x_P, y_P, z_P) en K dadas por

$$t_P = \gamma(t'_P + \beta x'_P), \tag{4.21}$$
$$x_P = \gamma(x'_P + \beta t'_P), \tag{4.22}$$
$$y_P = y'_P, \tag{4.23}$$
$$z_P = z'_P. \tag{4.24}$$

De hecho estas transformaciones son válidas para cualquier evento P en el espacio-tiempo, por lo que no necesitamos especificar el evento en cuestión, y simplemente escribir la siguiente relación entre coordenadas:

$$t = \gamma(t' + \beta x'), \tag{4.25}$$
$$x = \gamma(x' + \beta t'), \tag{4.26}$$
$$y = y', \tag{4.27}$$
$$z = z'. \tag{4.28}$$

Lo importante aquí es recordar que estas relaciones son sólo válidas para sistemas de referencias donde los orígenes coinciden.

4.3 Relacionando sistemas de coordenadas

Nuestro propósito es adquirir una idea más profunda de la estructura del espacio tiempo. Si bien hemos insistido en que los sistemas de coordenadas son meramente formas arbitrarias de registrar eventos, el estudio de cómo dos sistemas de coordenadas están relacionados nos resultará tremendamente provechoso. Como de costumbre, ignoremos por el momento las coordenadas y y z y consideremos únicamente lo que pasa en el plano t-x. Aprovechando la notación introducida previamente, tenemos:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

y

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda(-\theta) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Estas transformaciones relacionan a cualquier par de coordenadas (t, x) en K con otro par de coordenadas (t', x') en K'. Un evento cualquiera P registrado en K' con coordenadas (t', x') será por lo tanto registrado con coordenadas (t, x) en K.

Dado que las relaciones (4.29)-(4.30) tienen inversas bien definidas, éstas pueden ser pensadas como mapas de uno a uno (biyecciones) entre dos espacios $\mathbb{R}^2$. Es posible, por lo tanto, graficar ambos sistemas de coordenadas en un sólo diagrama! Veamos como hacer esto. Partamos considerando el sistemas de coordenadas K de la forma usual. Es decir, con los ejes t y x perpendiculares el uno con respecto al otro (ver figura siguiente). Hemos

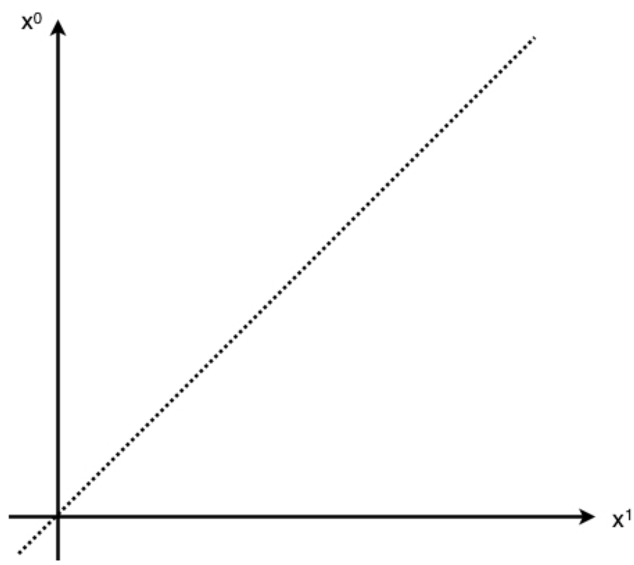


Figure 2: Los ejes t y x del sistema inercial K son perpendiculares el uno con respecto al otro. La figura también muestra la proyección del cono de luz correspondiente a la ecuación $t = x$.

también graficado la diagonal $t = x$ que consiste en la trayectoria rectilínea seguida por una señal a partir del origen. Sobre este diagrama, intentemos ahora graficar la posición de los ejes t' y x' del sistema de referencia K'. Esto corresponde a graficar un conjunto de eventos caracterizados por ciertas condiciones. Por ejemplo, el eje t' corresponde a un conjunto de eventos caracterizados por la condición $x' = 0$. Utilizando esta condición junto a la relación (4.30), podemos concluir que tal conjunto de eventos está caracterizado por

$$-\sinh\theta\, t + \cosh\theta\, x = 0. \tag{4.31}$$

En otras palabras tenemos una línea en el plano t-x en K respetando la ecuación $t = (\tan\theta)^{-1}x$. Esta línea se intercepta con el origen y tiene un ángulo ϕ con respecto al eje t dado por $\tan\phi = \tanh\theta$ (ver figura siguiente). Recordemos que $\tan\theta = v$ donde v es la velocidad relativa de nuestros observadores usuales. Para graficar el eje x' podemos proceder en forma análoga. En efecto, el eje x' corresponde al conjunto de eventos caracterizados por la condición $t' = 0$, y tal condición arroja la ecuación

$$\cosh\theta\, t - \sinh\theta\, x = 0. \tag{4.32}$$

Esta es una línea en el plano t-x en K respetando la ecuación $t = \tan\theta x$. Esta línea se intercepta con el origen y tiene el mismo ángulo ϕ anterior pero esta vez con respecto al eje x (ver figura siguiente). Vemos entonces que es posible graficar los ejes t' y x' del

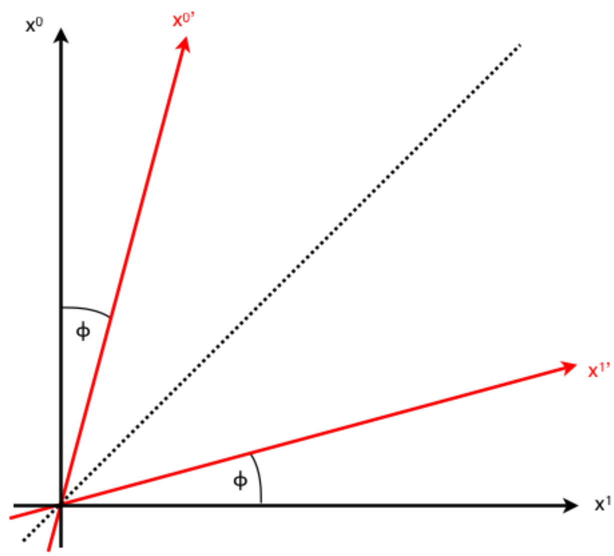


Figure 3: Es posible graficar los ejes t' y x' del sistema K' en el sistema de referencia K. Desde el punto de vista del observador O', éstos son perpendiculares!

sistema K' en el sistema de referencia K. De hecho podemos comparar ambos sistemas de referencia de forma exhaustiva. Para ello podemos continuar con el procedimiento anterior para graficar el *cuadriculado* del sistema K' sobre el *cuadriculado* del sistema de coordenadas K, tal como lo muestra la siguiente figura. Con esta forma de graficar, podemos ubicar eventos en forma simultánea en ambos sistemas de referencia.

Ejercicio 1. Discuta como se grafica las coordenadas de K sobre el sistema de coordenadas K'. Es decir, realice la operación inversa.

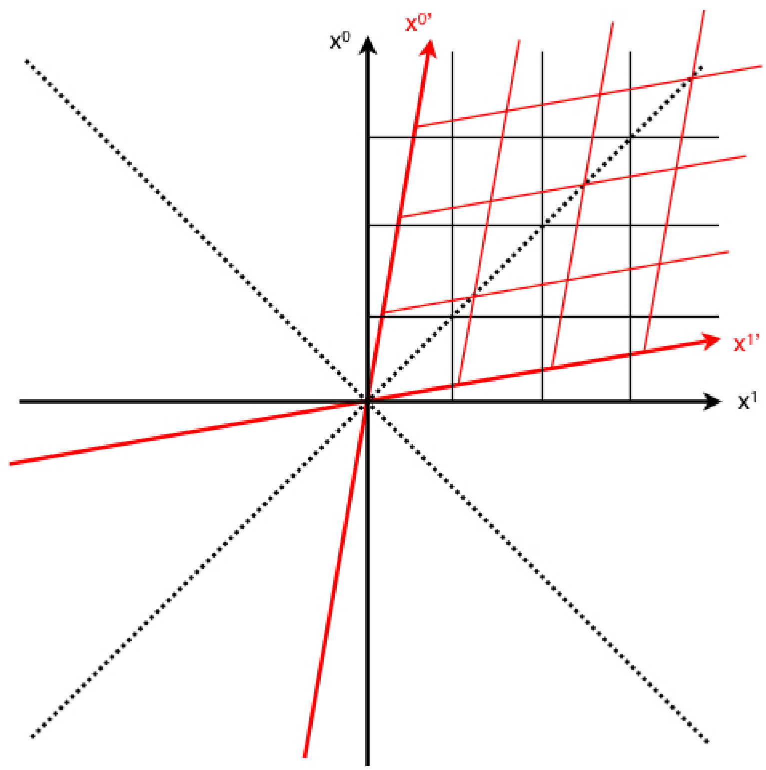


Figure 4: Es posible comparar simultáneamente los cuadriculados de ambos sistemas de coordenadas K y K'. En este caso, hemos optado por un diagrama en el cual los ejes t y x del sistema de coordenadas de K aparezcan perpendiculares.

Para finalizar, resulta instructivo reconocer que el análisis anterior puede ser repetido también para el caso más familiar de una rotación. Si dos sistemas de referencia están relacionados mediante una rotación en un ángulo ϕ, podemos graficar ambos sistemas de referencia en forma simultánea (ver figura siguiente).

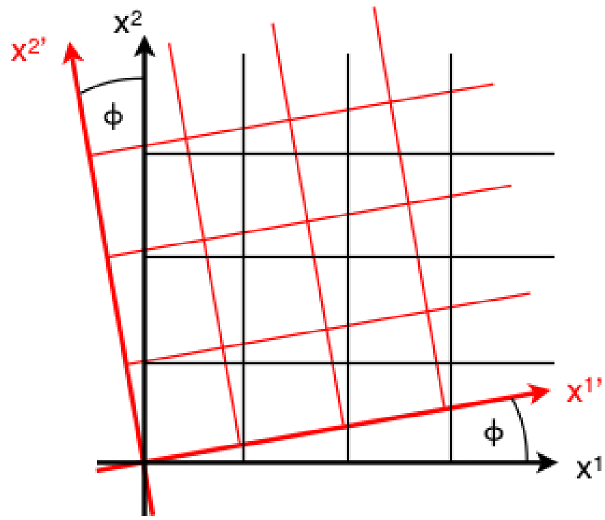


Figure 5: Un caso análogo reconocible es aquel en el cual dibujamos los reticulados de dos sistemas de coordenadas rotados.

4.4 Superficies invariantes

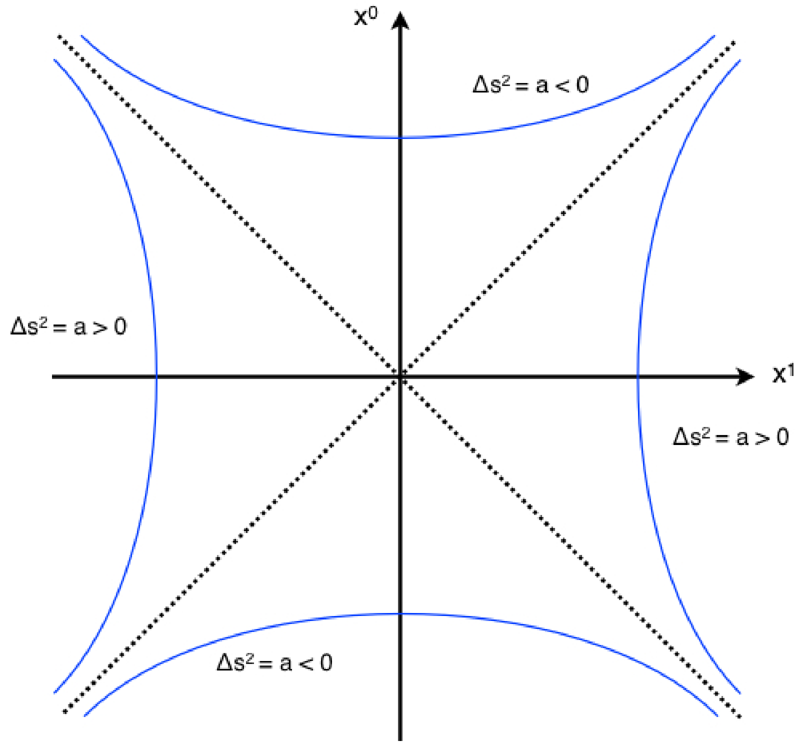
Recordemos que el intervalo espacio-temporal Δs^2 es un invariante bajo transformaciones de Lorentz. Dado que en el presente análisis estamos interesados en la posición de los eventos con respecto al origen, este invariante puede ser escrito de la forma:

$$\Delta s^2 = -t^2 + x^2, \tag{4.33}$$

donde el par (t, x) corresponden a las coordenadas del evento en cuestión. Está claro que hay una infinitud de eventos todos a la misma distancia desde el origen. En otras palabras, para un valor fijo $\Delta s^2 = a$, la ecuación anterior puede ser entendida como la ecuación de una curva caracterizada por eventos equidistantes del origen. Esta curva cumple con la ecuación

$$t = \pm\sqrt{x^2 - a}, \tag{4.34}$$

la que corresponde a la ecuación de una hipérbole. La siguiente figura muestra las curvas obtenidas para distintos signos de a. Por ejemplo, si $a < 0$, entonces los eventos sobre la curva están separados del origen por un intervalo tipo tiempo y por lo tanto deben estar o en el futuro absoluto del origen (que corresponde a la parte superior del cono) o en el pasado absoluto del origen (que corresponde a la parte inferior del cono). Estas corresponden a las hipérboles superiores e inferiores de la figura siguiente. En forma



similar, si $a > 0$, entonces los eventos de la curva están separados del origen por un intervalo tipo espacio. En la figura, estas son las curvas fuera del cono de luz.

4.5 Más sobre la comparación de sistemas de coordenadas

Podemos juntar los resultados desarrollados en las secciones anteriores para entender como las superficies invariantes están relacionados con el cuadriculado de dos sistemas de referencia, cuando éstos son graficados en un mismo diagrama (tal como lo hicimos en la Sección 4.3). Para ello, partamos considerando a los usuales sistemas de referencia K y K' con coordenadas relacionadas mediante

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

y consideremos un evento P_1 ubicado en la posición $(t_1, x_1) = (a, 0)$. Ya sabemos como visualizar la superficie invariante $\Delta s^2 = -a^2$ (la que corresponde a una hipérbola) pasando sobre este evento (ver figura anterior). Observen que podemos definir una recta L_1 pasando por P_1 y que sea tangente a la superficie invariante. La ecuación de esta recta es simplemente $t = a$, y tal como lo muestra la figura 6, ésta es paralela al eje x. En el sistema de referencia K, dicha recta corresponde al conjunto de todos los eventos simultáneos a P_1. Por otro lado, hemos visto que un evento P_2 con coordenadas $(t_2, x_2) = (a\cosh\theta, a\sinh\theta)$ es registrado por el observador O' en las coordenadas $(t'_2, x'_2) = (a, 0)$. En su propio sistema de coordenadas este observador también puede dibujar la superficie invariante y una recta L_2 pasando por P_2 tangente a la mencionada superficie. La ecuación de dicha recta $t' = a$, la que es paralela al eje x'. Esto quiere decir que, necesariamente, al graficar L_2 en el sistema de referencia K, ésta debe continuar siendo tangente a la superficie, paralela a x' (ver figura siguiente). Esto se puede comprobar fácilmente al insertar la ecuación de la

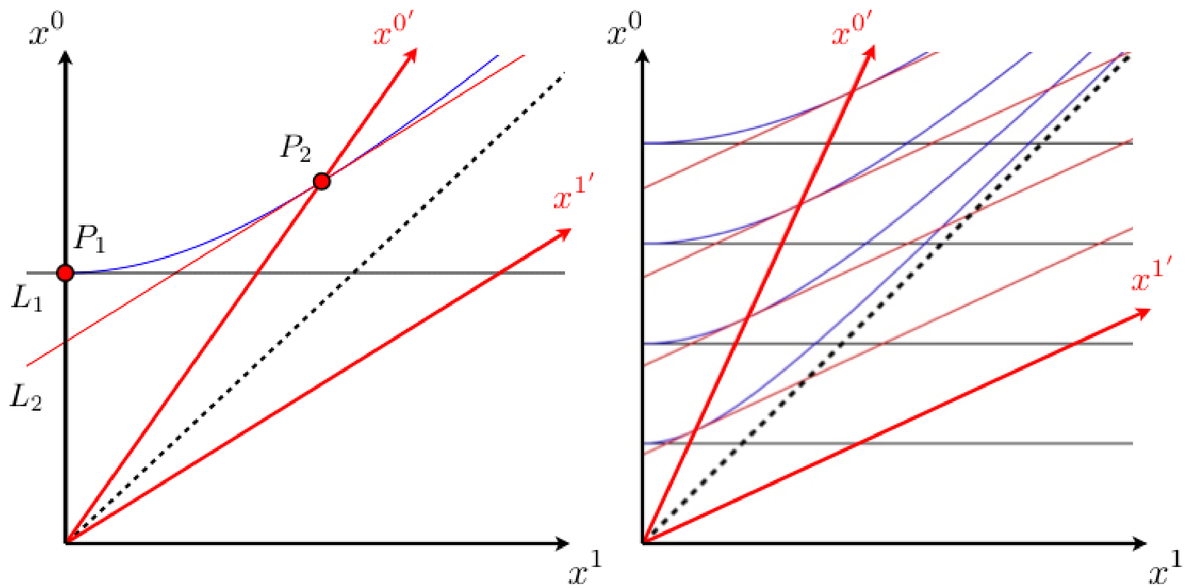


Figure 6: La recta L_1 corresponde al conjunto de eventos simultáneos a P_1 en el sistema inercial del observador O. Así mismo, la recta L_2 corresponde al conjunto de eventos simultáneos a P_2 en el sistema inercial del observador O'. Ambas rectas son tangenciales a la curva invariante $\Delta s^2 = -a^2$

recta L_2 (dada por $t' = a$) en la expresión (4.35) para obtener la ecuación de dicha recta en el sistema de coordenadas K. La ecuación, en forma paramétrica, viene dada por:

$$(t, x) = (\cosh\theta\, a + \sinh\theta\, x', \sinh\theta\, a + \cosh\theta\, x'), \tag{4.36}$$

donde x' es el parámetro. De otro modo, eliminando el parámetro, la ecuación viene dada por

$$t = x\tanh\theta + \frac{a}{\cosh\theta}, \tag{4.37}$$

la que efectivamente es tangente a la curva invariante $t = \sqrt{x^2 + a}$. Esto nos permite ver como las unidades del cuadriculado de ambos sistemas de referencia son afectados por las transformaciones de Lorentz en un mismo diagrama (ver figura anterior).