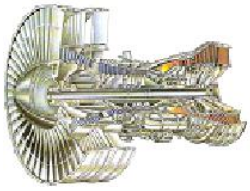
Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesor: Nelson Zamorano
Profesores Auxiliares:
Claudio Jarufe
Francisco Parra



TERMODINÁMICA FI-2004-03
Guia # 1

Problema 1

Considere el siguiente experimento:
Entre los dígitos 1, 2, 3, 4, se escoge uno de ellos. En seguida, la segunda selección se realiza a partir de los tres dígitos restantes. El conjunto de estos eventos son pares ordenados de números, por ejemplo: (1, 3), (3, 1), (3, 4)...
a.- ¿Cuántos puntos hay en este espacio de eventos? Haga una hipótesis razonable y determine la probabilidad de cada evento.
b.- Considere los eventos compuestos
A:El primer dígito es impar, **B**: El primer dígito es par.
Determine **P(A)** y **P(B)**. Explicite el principio básico usado.
c.- Determine $\mathbf{P(A \bigcup B)}$ y **P(A B)**. Muestre que $\mathbf{P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A\,B)}$. Determine si los eventos **A** y **B** son independientes. Explique porque le parece que este resultado es razonable.
d.- Considere los eventos compuestos :
C: el último dígito es par; **D**: el último dígito es impar.
¿Cuál es el valor de **P(C)** y **P(D)**?
e.- Dibuje un espacio de muestra (como en teoría de conjuntos) con todos los puntos (sin individualizarlos) indicando todos los eventos compuestos **A**, **B**, **C** y **D**.
f.- Determine $\mathbf{P(C \bigcup A)}$ y **P(A C)** y muestre que
$\mathbf{P(A \bigcup C) = P(A) + P(C) - P(A\,C)}$.
g.- ¿Cuál es la probabilidad que, si sabemos que el primer dígito es impar, el último dígito sea par? Para determinar esto, exprese primero la afirmación anterior en términos adecuados de la probabilidad condicional, y proceda a usar la ecuación:

$$P(X|Y) = \frac{P(X\,Y)}{P(Y)}, \quad \text{para determinar su valor.}$$

¿Son independientes ambos eventos?¿Por qué?
h.- Sea **E** el siguiente evento compuesto: la suma de los dos dígitos es par. Determine $\mathbf{P(E)}$, $\mathbf{P(A \bigcup E)}$ y $\mathbf{P(A\,E)}$. Muestre que

$$\mathbf{P(A \bigcup E) = P(A) + P(E) - P(A\,E)}$$

i.- ¿Cuál es la probabilidad para que ocurra lo siguiente, si la suma de los dígitos es un número par, el primer dígito es impar? Siga el procedimiento de la parte g.- ¿Son los dos eventos independientes? ¿Por qué?
Extraido de la referencia: **Equilibrium Statistical Mecahnics** de E. A. Jackson.

Problema 2

En el juego de la Ruleta Rusa, se inserta una bala en la caja del revólver, dejando los otros cinco compartimientos de la caja vacíos. Luego, se gira la caja, se apunta en la cabeza y se jala el gatillo:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de seguir vivo luego de haber jugado N veces?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de sobrevivir durante $N-1$ turnos, y luego recibir un disparo en la N-ésima vez que se jala el gatillo?

(c) ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de veces que un jugador tiene la oportunidad de jalar el gatillo en este macabro juego?

Problema 3

i) Supongamos que Ud. es un inspector del Consejo de Defensa del Consumidor. En esta calidad, Ud. se dirige al sector de la panadería de un prestigioso supermercado. Compra 30 bolsas de pan de molde que están marcadas con un peso neto de 500 gramos. De vuelta en su laboratorio, las pesa y descubre que sus masas son : 493, 503, 486, 489,501,498, 507, 504, 493, 487, 495, 498, 494, 490, 494, 490, 497, 503, 498, 495, 503, 496, 492, 492, 495, 498, 490, 490, 497 y 482 gramos. Una vez comprobado estos valores se ditrige al Supermercado y les deja una advertencia. ¿Por qué?
ii) Más tarde vuelve al mismo sitio del supermercado (ya lo conocen). Nuevamente compra 30 bolsa de pan de molde. Vuelve la laboratorio, las pesa y encuentra lo siguiente: 504, 503, 503, 503, 501, 500, 500, 501, 505, 501, 501, 500, 508, 503, 503, 500, 503, 501, 500, 502, 502, 501, 503, 501, 501, 502, 503, 501, 502 y 500 gramos. Ud. queda conforme puesto que todos pesan más de 500 gr y procede a entregar el informe a su jefa. Más tarde recibe la orden de su jefa de que clausure la panadería del supermercado. ¿Qué vió ella que Ud. no notó?
Referencia: **Biological Physics**, P. Nelson.

Problema 4

La prueba del DNA.
El **DNA** encontrado en la escena del crimen se compara con el correspondiente de un sospechoso para determinar si ambas muestras provienen del mismo individuo. Se utiliza un enzima para cortar cada **DNA** en fragmentos más cortos. El enzima utilizado siempre corta el **DNA** en la misma secuencia y las posiciones de tales secuencias difieron entre los individuos. Suponga que un fragmento particular llamado **A**,tiene una variante **A1** que solo se encuentra en el 1 % de la población. De igual forma, suponga que el fragmento **B** posee una variante **B1** que se encuentra sólo en el 4 % de la población, y el segmento **C** tiene una variante **C1** que se encuentra sólo en el $2,5$ % de la población. Suponga además que estas variantes mencionadas, se encuentran distribuidas en la población en forma independiente entre ellas.
i) Estime la probabilidad que un individuo, seleccionado al azar, posea estas tres variantes **A1**, **B1** y **C1** poco comunes.
ii) Suponga ahora que **A1** y **B1** NO están distribuidas en forma independiente entre ellas. Suponga que una persona con **A1** es muy probable que tenga también **B1**. Indique cómo este dato modificaría su prrespuesta en la parte a). basta que de un argumento, no se requiere una respuesta cuantitativa.
Referencia: **Biological Physics**, P. Nelson.

Problema 5

Dos borrachos comienzan juntos en el origen, cada uno teniendo la misma probabilidad de realizar un paso hacia la derecha o a la izquierda en el eje x. Encuentra la probabilidad de que se encuentren nuevamente luego de N pasos. Se da por entendido que los sujetos realizan su caminata simultáneamente.

Problema 4

La probabilidad $W(n)$ de que un evento caracterizado por una probabilidad p ocurra n veces en N intentos está dado por la distribución binomial:

$$W(n) = \frac{N!}{(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Considere una situación donde la probabilidad p es pequeña $(p << 1)$ y cuando estamos interesados en el caso $n << N$. (Notemos que si N es grande, W(n) se hace muy pequeño si $n \to N$ debido a lo que pequeño que se vuelve el factor p^n cuando $p << 1$. Por ende, W(n) se hace apreciable sólo cuando $n << N$.) Luego, se pueden realizar aproximaciones para transformar la distribución anterior a una forma más simple.

(a) Usando que $ln(1-p) \approx -p$, muestre que $(1-p)^{N-n} \approx e^{-Np}$

(b) Muestre que $\frac{N!}{(N-n)!} \approx N^n$

(c) Con lo anterior, muestre que $W(n)$ se reduce a:

$$W(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Donde $\lambda = Np$ es el promedio del número de eventos. La distribución anterior es llamada la "Distribución de Poisson"

Problema 6

Considere un gas de N_0 moléculas no interactuantes encerradas en un contenedor de volumen V_0. Ponga su atención en cualquier subvolumen V de este contenedor y describa por N el número de moléculas localizadas en este subvolumen. Cada molécula tiene la misma probabilidad de estar localizada en cualquier parte del contenedor, i.e, la probabilidad de que una molécula dada se localice en un subvolumen V es simplemente V/V_0.

(a) ¿Cuál es el valor promedio $\overline{N}$ de moleculas localizadas en V? Exprese su resultado en términos de N_0, V_0 y V.

(b) Encuentre la dispersión relativa $\overline{(N-\overline{N})^2}/\overline{N}^2$ en el número de moléculas localizadas en V. Exprese su respuesta en términos de $\overline{N}$, V y V_0.

(c) ¿En qué se convierte la respuesta de la parte (b) cuando $V << V_0$?

(d) ¿Qué valor asume la dispersión$(\overline{(N-\overline{N})^2}/)$ cuando $V \to V_0$

Problema 7

Considere el problema de la caminata aleatoria en una dimensión, la probabilidad de un desplazamiento entre s y $s + ds$ es:

$$w(s)ds = (2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}} exp(-(s-l)^2/2\sigma^2)ds$$

Después de N pasos:

(a) ¿Cuál es el desplazamiento promedio $\overline{x}$ desde el origen?

(b) ¿Cuál es la dispersión $\overline{(x-\overline{x})^2}$?

Problema 8

(a) Una partícula puede encontrarse de forma equiprobable en una circunferencia. Considere el eje z y cualquier línea recta en el plano del círculo que pasa por el centro. Denotemos por θ el ángulo entre el eje z y la línea recta que conecta el centro del círculo con la partícula. ¿Cuál es la probabilidad de que este ángulo se encuentre entre θ y $\theta + d\theta$?

(b) Una partícula puede encontrarse de forma equiprobable en la superficie de una esfera. Considere el eje z y cualquier línea recta que pasa por el centro de la esfera. Denotemos por θ el ángulo entre el eje z y la línea recta que conecta el centro de la esfera con la partícula. ¿Cuál es la probabilidad de que este ángulo se encuentre entre θ y $\theta + d\theta$?