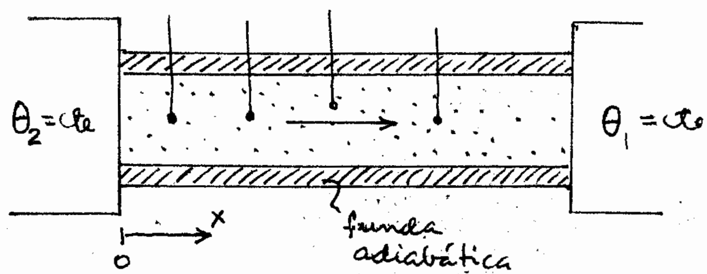
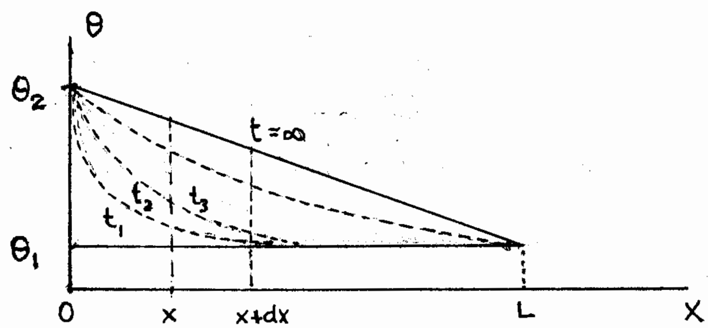
Conducción del calor. (Caso en una dimensión)

Consideremos una barra homogénea delgada, inicialmente a la temperatura θ_1, aislada térmicamente del exterior excepto en sus extremos. En un cierto instante ($t=0$), el extremo derecho lo ponemos en contacto térmico con una fuente térmica a la temperatura constante θ_1, mientras el extremo izquierdo lo ponemos en contacto con una fuente térmica a la temperatura constante $\theta_2 > \theta_1$. La sección transversal de la barra es constante igual a A, mientras que su longitud es L.



Experimentalmente se comprueba que transcurrido un cierto tiempo, las temperaturas en distintas secciones de la barra cambian. En la figura siguiente se muestra un gráfico θ vs. x para distintos tiempos t.

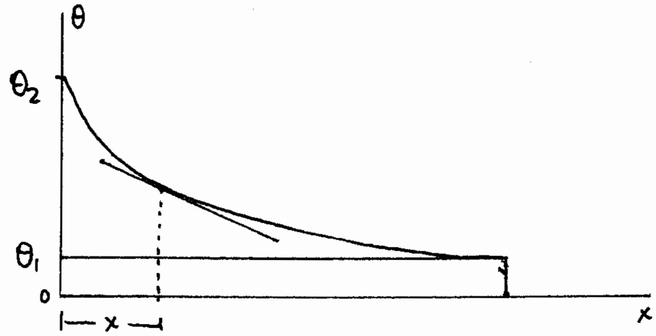


Observamos que cuando el tiempo tiende a infinito la distribución de temperaturas tiende a una distribución lineal:

$$\theta(x) = \theta_2 - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{L}\right) x$$

de carácter permanente, denominado como estado estacionario.
Todos los estados anteriores de distribución de temperaturas los denominamos como estados transientes

Consideremos un estado transiente cualquiera. Le corresponde una cierta distribución de temperaturas $\theta(x)$:



La pendiente $\frac{d\theta}{dx}$ es diferente en cada punto de la curva. Recibe el nombre de gradiente térmica.

Si en el punto correspondiente a la sección de la barra a la distancia x de su extremo izquierdo tiene un valor $\frac{d\theta}{dx}$ entonces, en el punto correspondiente a la sección en $x+dx$ tendrá un valor:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x+dx} = \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_x dx$$

$$= \frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2\theta}{dx^2}\, dx \qquad (*)$$

Experimentalmente se encuentra también que la cantidad de calor que atraviesa la sección transversal de la barra a la distancia x, por unidad de tiempo, es proporcional a la gradiente térmica $d\theta/dx$ en dicha sección y proporcional a su área A.

Así,
$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -kA\,\frac{d\theta}{dx}$$

donde la constante k, que depende de la naturaleza del material de la barra, recibe el nombre de <u>conductividad térmica</u>. El signo (−) hace corresponder el sentido del flujo de calor con el sentido del eje x (de mayor temperatura a menor temperatura).

De este modo, si consideramos dos secciones de la barra a las distancias x y $x+dx$ que definen un determinado segmento de ella, la cantidad de calor dQ_e que entra por la sección izquierda en un tiempo dt será:

$$dQ_e = -kA\,\frac{d\theta}{dx}\,dt$$

mientras que el que sale por la sección derecha del segmento será, según (*),

$$dQ_s = -kA\left[\frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2\theta}{dx^2}dx\right]dt.$$

Por lo tanto, la cantidad neta de calor que fluye al interior del segmento es:

$$dQ = dQ_e - dQ_s = kA\frac{d^2\theta}{dx^2}\,dx\,dt \qquad (1)$$

Esta cantidad neta de calor que entra a este segmento de barra eleva su energía interna y por ende su temperatura. Si m es la masa de este segmento,

$$dQ = m\,C_p\,d\theta \qquad (2)$$

donde C_p es la capacidad calórica específica (calor específico) de la sustancia.

Si hacemos $m = \rho A dx$, donde ρ es la densidad y Adx el volumen del segmento, la ec. (2) se transforma en

$$dQ = \rho A\,c_p\,d\theta\,dx \qquad (3)$$

Igualando (1) y ($\overset{3}{\cancel{2}}$): $\rho \cancel{A} c_p\,d\theta \cancel{dx} = k\cancel{A}\frac{d^2\theta}{dx^2}\cancel{dx}\,dt$

$$\therefore \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{\rho c_p}\frac{d^2\theta}{dx^2}} \qquad (4)$$

conocida como la ecuación de difusión

En ella se observa que la temperatura θ depende tanto del tiempo como de la posición x. Su solución general no es sencilla, salvo para el caso de estado estacionario, que corresponde a la condición $\frac{d\theta}{dt}=0$.

En este caso, siempre que $k/\rho c_p$ sea constante, la solución es:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = 0 \quad \therefore \frac{d\theta}{dx} = C_1$$

$$\therefore d\theta = C_1 dx \Rightarrow \theta = C_1 x + C_2$$

Las condiciones $x = 0$, $\theta(0) = \theta_2$ y $x = L$, $\theta(L) = \theta_1$

conducen a

$$\theta = \theta_2 - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{L}\right)x.$$

Entonces, en el estado estacionario la temperatura decrece linealmente a lo largo de la barra.

Entonces, si $\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0$,

$$dQ_e = dQ_s = dQ = -kA\frac{d\theta}{dx}dt$$

de donde se obtiene la ecuación de Fourier para la conducción del calor en un estado estacionario o régimen permanente:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = -kA\frac{d\theta}{dx}} \qquad (5) \quad \text{Ec. de Fourier}$$

k = conductividad térmica ; $\frac{d\theta}{dx}$ = gradiente de temperatura

Conductores de calor : k grande
Aislantes o malos conductores del calor k pequeño.

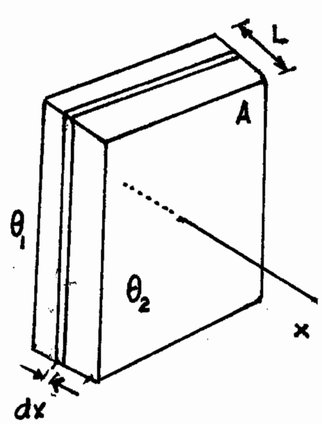
Valores de la conductividad k para algunos materiales :

Material	k [W/mK]
Diamante	2300
Plata	429
Cobre	401
Vidrio	1,4
Fibra de vidrio	0,043
Aire	0,026
Poliestireno expand.	0,01

Ejercicios :

1. Caso del muro.

$\theta_1 > \theta_2$



En el estado estacionario las temperaturas de las láminas paralelas a las caras de la placa permanecen constantes y decrecen linealmente desde θ_1 a θ_2. $\dot{Q}$ también es constante.

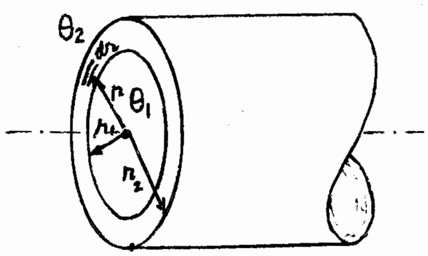
Separando variables en la ecuación de Fourier

$$\dot{Q}\,dx = -kA\,d\theta$$

Integrando en forma definida entre los límites 0 a L para x y desde θ_1 a θ_2 para las temperaturas:

$$\dot{Q}\int_0^L dx = -kA\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \longrightarrow \dot{Q} = kA\,\frac{\theta_1-\theta_2}{L}$$

2. <u>Cilindro hueco</u> que conduce líquido a temperatura θ_1 > temp. exterior θ_2



La gradiente térmica aquí es $d\theta/dr$, luego,

$$\dot{Q} = -kA\frac{d\theta}{dr}$$

Separando variables:

$$\dot{Q}\,dr = -kA\,d\theta$$

Considerando una cáscara cilíndrica de espesor dr a la distancia r del eje central, el área A de 1 metro lineal es $A = 2\pi r\cdot 1$, luego:

$$\dot{Q}\,\frac{dr}{r} = -2\pi k\,d\theta$$

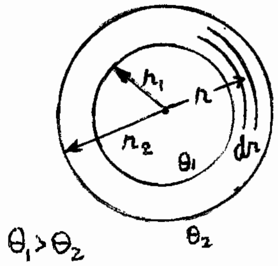
Integrando: $\dot{Q}\,\mathrm{Ln}\,r\Big|_{r_1}^{r_2} = -2\pi k\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$

$$\therefore \quad \dot{Q} = \frac{2\pi k(\theta_1-\theta_2)}{\mathrm{Ln}(r_2/r_1)}$$

Esta es la cantidad de calor transferida por segundo y por metro lineal de tubo.

3. Esfera hueca: Area de cáscara esférica de radio r : $A = 4\pi r^2$.

$$\therefore \quad \dot{Q} = -k \cdot 4\pi r^2 \frac{d\theta}{dr}$$



Separando variables e integrando

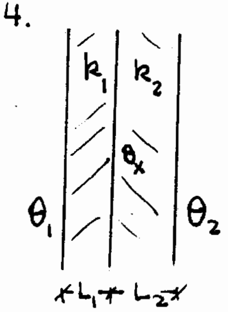
$$\dot{Q} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -4\pi k \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

Así, $\dot{Q} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = -4\pi k (\theta_2 - \theta_1)$

$$\dot{Q} = 4\pi k \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad \text{ó} \quad \boxed{\dot{Q} = 4\pi k r_1 r_2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{r_2 - r_1}}$$

Para que la temperatura interior se mantuviera constante en el valor θ_1 se debería entregar energía, por ejemplo mediante una resistencia eléctrica para compensar la pérdida $\dot{Q}$.

4.



Un muro compuesto, de materiales con coeficientes k_1 y k_2, cuyas caras externas se encuentran a las temperaturas constantes θ_1 y θ_2, con $\theta_1 > \theta_2$ y de espesores L_1 y L_2 conduce calor. Determinar la temperatura θ_x de la interfase y un k equivalente en términos de k_1, k_2, L_1 y L_2.

Solución: $\dot{Q} = -k_1 A \frac{\theta_x - \theta_1}{L_1} = -k_2 A \frac{\theta_2 - \theta_x}{L_2} \quad (1) \quad \Rightarrow \boxed{\theta_x = \frac{k_1 L_2 \theta_1 + k_2 L_1 \theta_2}{k_1 L_2 + k_2 L_1}} \; (2)$

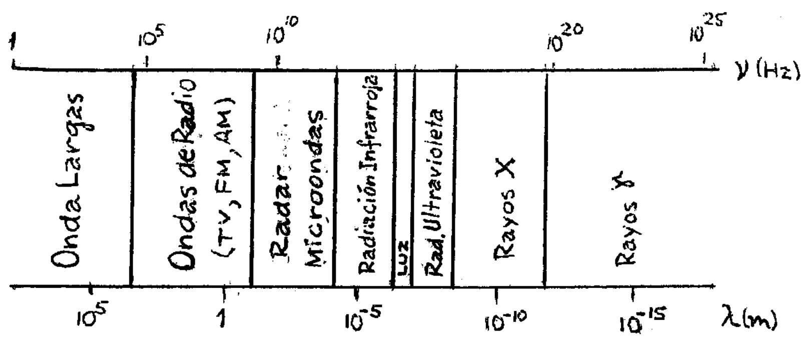
$$\therefore \quad \dot{Q} = -k_1 A (\theta_x - \theta_1)/L_1$$

$$= -\frac{k_1 A}{L_1} \left[\frac{k_1 L_2 \theta_1 + k_2 L_1 \theta_2}{k_1 L_2 + k_2 L_1} - \theta_1 \right]$$

$$= -\frac{k_1 k_2}{k_1 L_2 + k_2 L_1} A (\theta_2 - \theta_1) = -\frac{k_1 k_2 (L_1 + L_2)}{k_1 L_2 + k_2 L_1} A \frac{\theta_2 - \theta_1}{L_1 + L_2} \quad \therefore \boxed{k = \frac{k_1 k_2 (L_1 + L_2)}{k_1 L_2 + k_2 L_1}} \; (3)$$

RADIACION TERMICA.

El espectro de radiación electromagnética es extraordinariamente amplio. Abarca, en longitudes de onda, desde los 10^8 m (radios de onda larga), hasta los 10^{-17} m. (rayos γ). El intervalo visible de esta radiación está entre los 4×10^{-7} m (color violeta) y los 7×10^{-7} m (color rojo), radiación que constituye la <u>luz</u>



La radiación visible está comprendida dentro de un intervalo muy estrecho.

$$700\,nm > \lambda > 400\,nm$$

$$1\,nm = 10^{-9}\,m$$

Radiación con longitudes de onda algo mayores que la luz roja se denomina <u>infrarroja</u>. Radiación con longitudes de onda algo menores que el violeta recibe el nombre de <u>ultravioleta</u>.

<u>Radiación térmica</u>: La radiación electromagnética emitida por sólidos, líquidos o gases, en virtud de su temperatura constituye un espectro contínuo. Para temperaturas inferiores a los 500 °C la mayor parte de la energía emitida se encuentra distribuída en longitudes de onda comprendidas en la región del infrarrojo. A temperaturas mayores comienza a incluir longitudes de onda en la región visible del espectro. En general también, a mayor temperatura, mayor cantidad de energía radiante emitida.

La tasa de emisión de un cuerpo depende en general de la temperatura y de la naturaleza de su superficie. Por otra parte, de la energía radiante que incide desde el exterior sobre esta superficie, una parte es absorbida y otra parte reflejada

La fracción de energía radiante incidente que es absorbida depende de la temperatura y de la naturaleza de la superficie del cuerpo que absorbe. Esta fracción es denominada COEFICIENTE DE ABSORCIÓN α

El negro de humo tiene su valor de α cercano a 1 (entre 20°C y 350°C)
El hielo a 0°C tiene $\alpha = 0{,}97$.

Se define un cuerpo ideal, el CUERPO NEGRO, con $\alpha_N = 1$.

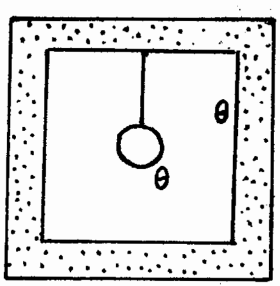
Una aproximación experimental a un cuerpo negro la constituye una cavidad cuyas paredes interiores se mantienen a una temperatura constante θ, comunicada con el exterior mediante un orificio pequeño. La superficie de este orificio se comporta como absorbente perfecta ya que la radiación incidente sobre ella pasa al interior de la cavidad donde es absorbida en su totalidad por las paredes interiores.

Las paredes interiores de la cavidad emiten radiación electromagnética de modo que se encuentra llena de radiación isótropa. En este sentido se define como irradiancia H dentro de la cavidad a la energía radiante total que incide sobre la unidad de área y por unidad de tiempo sobre cualquiera superficie colocada en el interior de la cavidad.

En un cuerpo cualquiera se define como emitancia radiante R a la energía radiante total emitida por unidad de área y unidad de tiempo.

A continuación se describirán tres experimentos pensados de los que se desprenden importantes conclusiones.

a) Cuerpo negro dentro de una cavidad, a igual temperatura que las paredes de ésta; la temperatura del cuerpo no varía ya que no hay diferencia de temperatura. Esto significa que:



$$\left\{\begin{matrix}\text{Potencia absorbida}\\ \text{por unidad de área}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Potencia emitida}\\ \text{por unidad de área}\end{matrix}\right\}$$

o $\qquad \alpha_N H = R_N$

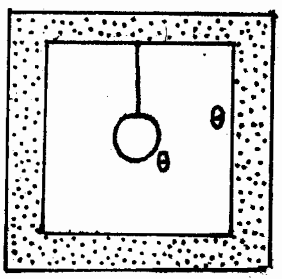
Como $\alpha_N = 1$, $\quad \boxed{H(\theta) = R_N(\theta)}$

Conclusión: "La irradiancia $H(\theta)$ de una cavidad cuyas paredes están a la temperatura θ es igual a la emitancia radiante del cuerpo negro a igual temperatura".

Por esta razón la radiación en una cavidad es llamada "radiación del cuerpo negro." Como la irradiancia $H(\theta)$ de una cavidad no depende de la naturaleza de las paredes interiores, se desprende de ésto que la emitancia radiante del cuerpo negro R_N depende únicamente de su temperatura: $R_N(\theta)$.

b) Ley de Kirchhoff.

Consideremos ahora un cuerpo no-negro en el interior de una cavidad, a la misma temperatura que las paredes de ésta.



La emitancia radiante de un cuerpo no-negro depende tanto de su temperatura como de la naturaleza de su superficie.

Se tiene, del equilibrio térmico:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Potencia absorbida} \\ \text{por unidad de área}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Potencia emitida} \\ \text{por unidad de área}\end{matrix}\right\}$$

$$\alpha(\theta)\, H(\theta) = R(\theta)$$

Pero, $\quad H(\theta) = R_N(\theta)$

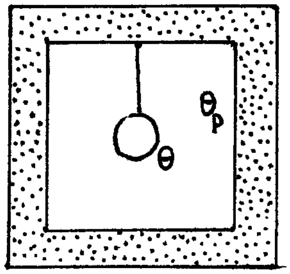
Luego,

$$\boxed{R(\theta) = \alpha(\theta)\, R_N(\theta)}$$

resultado conocido como <u>Ley de Kirchhoff</u>:

"La emitancia radiante de un cuerpo no-negro a cualquier temperatura es igual a una fracción de la emitancia radiante del cuerpo negro a igual temperatura, siendo esta fracción igual al coeficiente de absorción α del cuerpo no negro a esta temperatura"

c) Finalmente, sea un cuerpo no negro a la temperatura θ en el interior de una cavidad cuyas paredes están a la temperatura θ_p. $(\theta \neq \theta_p)$.



En este caso no hay equilibrio térmico.

Llamando A al área total de la superficie del cuerpo no negro y $\frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ al calor neto transferido en un dt :

$$\dot{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Potencia absorbida} \\ \text{a través de A} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Potencia emitida} \\ \text{a través de A} \end{array} \right\}$$

$$= A\,\alpha(\theta)\,H(\theta_p) - A\,R(\theta)$$

$$= A\left[\alpha(\theta)\,H(\theta_p) - R(\theta)\right]$$

Pero, $H(\theta_p) = R_N(\theta_p)$ y $R(\theta) = \alpha(\theta)\,R_N(\theta)$ (Kirchhoff).

Luego,

$$\boxed{\dot{Q} = A\,\alpha(\theta)\left[R_N(\theta_p) - R_N(\theta)\right]}$$

Estudiando la radiación emitida por una pequeña perforación practicada en la pared de una cavidad, Stefan encontró empíricamente que la potencia emitida por unidad de área era proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta, expresión deducida más tarde en forma teórica por Boltzmann. Así, la ley de Stefan-Boltzmann se expresa:

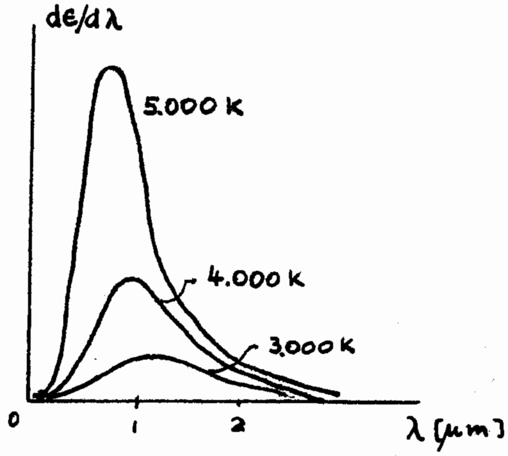
$$\boxed{R_N(\theta) = \sigma\,\theta^4}$$

donde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4}$

Con ésto se tiene, finalmente :

$$\boxed{\dot{Q} = A\,\alpha(\theta)\,\sigma\left(\theta_p^4 - \theta^4\right)}$$

A fines del siglo ~~pasado~~ antepasado se midió experimentalmente la distribución de la energía radiante de una cavidad (radiación del cuerpo negro), según longitudes de ondas para diferentes temperaturas. Las distribuciones son asimétricas, como muestra la figura



Se observa:

- Aumento de la intensidad de emisión con el aumento de temperatura.

- Corrimiento del máximo en dirección de las longitudes de onda más cortas (ultravioleta)

Empíricamente se enunció la llamada Ley de Wien, que corresponde a este comportamiento y que da la relación entre la longitud de onda correspondiente al máximo de la distribución y la correspondiente temperatura en kelvin:

$$\boxed{\lambda_m \theta = 0{,}29 \ \text{cm K}} \quad \text{LEY DE WIEN}$$

Ejercicio: a) Un cuerpo pequeño a la temperatura θ, de coeficiente de absorción α es colocado en una cavidad en la que se ha hecho el vacío y cuyas paredes se encuentran a la temperatura θ_p. Si la diferencia $\theta_p - \theta$ es pequeña, demostrar que la velocidad de transferencia de calor por radiación es:

$$\dot{Q} = 4\theta_p^3 A \alpha \sigma (\theta_p - \theta)$$

b) Si el cuerpo permanece a presión constante, demostrar que el tiempo necesario para que el cuerpo varíe su temperatura de θ_1 a θ_2 es :

$$t = \frac{C_p}{4\theta_p^3 A\alpha\sigma} \, \mathrm{Ln}\, \frac{\theta_p - \theta_1}{\theta_p - \theta_2} .$$

Solución : a) Sea $\theta_p - \theta = \delta$; δ pequeño.

$$\therefore \quad \theta = \theta_p - \delta$$

$$\therefore \quad \theta^4 = (\theta_p - \delta)^4 = \theta_p^4 \left(1 - \frac{\delta}{\theta_p}\right)^4 \simeq \theta_p^4 \left(1 - 4\frac{\delta}{\theta_p}\right).$$

$$\therefore \quad \theta_p^4 - \theta^4 \simeq 4\theta_p^3 \delta$$

finalmente: $\theta_p^4 - \theta^4 \simeq 4\theta_p^3 (\theta_p - \theta)$

Con este último valor se obtiene, de $\dot{Q} = A\alpha\sigma(\theta_p^4 - \theta^4)$:

$$\boxed{\dot{Q} \simeq 4A\alpha\sigma\theta_p^3(\theta_p - \theta)}$$

b) $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = 4\theta_p^3 A\alpha\sigma(\theta_p - \theta)$. Además, $dQ = C_p\, d\theta$

$$\therefore \quad C_p\, d\theta = 4\theta_p^3 A\alpha\sigma(\theta_p - \theta)\, dt$$

Integrando : $\int_0^t dt = \frac{C_p}{4\theta_p^3 A\alpha\sigma} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\theta_p - \theta}$

$$\therefore \quad \boxed{t = \frac{C_p}{4\theta_p^3 A\alpha\sigma} \, \mathrm{Ln}\, \frac{\theta_p - \theta_1}{\theta_p - \theta_2}}$$