FI22A-02: Física Estadística
Clase Auxiliar N°1 (16 de Agosto de 2010)

Problema 1

Sea $dz = (2y^2 + x)dx + (y^2 + 4xy)dy$, encuentre la función $z = z(x,y)$

Problema 2

El coeficiente de dilatación cúbica de un cierto líquido está dado por $\beta = A - BP$ con A y B constantes.

a) Expresar dV en términos de β y κ

b) Calcular $\left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}\right)_P$

c) Calcular $\left(\frac{\partial \kappa}{\partial V}\right)_P$

<u>Indicación</u>:

Coeficiente de compresibilidad $\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_\theta$

Coeficiente de dilatación cúbica $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_P$

Problema 3

Para una cierta sustancia se ha encontrado experimentalmente en el laboratorio que sus coeficientes de dilatación cúbica y compresibilidad pueden expresarse como:

$\beta = \frac{A\theta}{V}$ y $\kappa = \frac{B}{V}$ en que A y B son dos constantes.

Se pide encontrar la ecuación de estado correspondiente para dicha sustancia.

Problema 4

Para una sustancia se encuentra que $V\beta = R$ para P = 1 y cualquier θ y que $V\kappa = \frac{R\theta}{P^2} - \frac{2a}{P^3}$ para cualquier θ y P.

R y a son constantes y en el límite de altas presiones ($P\rightarrow\infty$), el volumen $V\rightarrow V_0$. Encontrar la ecuación de estado de la sustancia.

Problema 5

Un sistema homogéneo tiene su compresibilidad dada por $\kappa = \frac{a}{V} + \frac{1}{P}$ y coeficiente de dilatación térmica $\beta = \frac{nR}{PV}$ con a=cte.

Determinar la ecuación de estado.

ALGUNOS CONCEPTOS BÁSICOS EN ANÁLISIS DIFERENCIAL E INTEGRAL

Sea $z = z(x,y)$

La diferencial total es: $$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

(diferencial lineal en dos variables)

Sean $M(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ y $N(x,y) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$

Entonces, $dz = M(x,y)dx + N(x,y)dy$

Condición de exactitud: $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$

Si una expresión diferencial lineal cumple la condición de exactitud, diremos que es integrable, es decir, si se integra en forma definida, entre puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el resultado de la integración es:

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = z(x_2, y_2) - z(x_1, y_1) = z_2 - z_1$$

Otra forma de expresarlo es:

$$\oint dz = 0$$

Si la diferencial es exacta, el resultado de la integración entre dos puntos z_1 y z_2 es siempre el mismo, independientemente de la trayectoria empleada.

Las funciones de estado tienen diferencial exacta.

Una expresión diferencial lineal en x e y que no cumpla la condición se dice que es inexacta y por lo tanto "no integrable". Es decir, el resultado de la integración depende de la trayectoria elegida que enlaza dichos puntos.

Identidades Importantes para el caso de tres variables x, y, z:

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1} \quad \text{o} \quad \boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1}$$

Tomando una cuarta variable u:

$$\boxed{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_u\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u = 1}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_u \equiv \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_u\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_u = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_u}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_u}}$$

Por último, para relacionar una nueva derivada del tipo $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v$ en que $v(x,y)$ con $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$, se puede partir de

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x dy$$

y formar directamente a partir de allí la relación buscada.

$$\left(\frac{du}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x\left(\frac{dy}{\partial x}\right)_v$$