

## 0.1. Objetivos

- Estudiar de los conceptos de elasticidad lineal y su relación con el concepto de resonancias.
- Familiarizarse con el análisis a través de series de Fourier de una señal.
- Introducir el concepto de mínimos cuadrados y de regresión lineal.

## 1.2. Fundamentos de elasticidad lineal

El concepto de sólido rígido es válido como una aproximación, muy útil para estudiar ciertos fenómenos donde la eventual deformación del sólido es poco importante. Específicamente, un sólido rígido se define como un material donde cada par de elementos que lo componen están separados por una distancia que no cambia en el tiempo.

Sin embargo, los sólidos sí pueden deformarse. Lo más simple es considerar sólidos homogéneos e isotrópicos. La primera condición se refiere a que las propiedades mecánicas del sólido, como rigidez o densidad, son iguales en todas partes. La segunda condición se refiere a que estas propiedades son iguales independientemente del *ángulo* con el que se mira el sólido.

Entonces, la elasticidad lineal de sólidos homogéneos e isotrópicos describe las posibles deformaciones en el límite de desplazamientos muy pequeños de los elementos que componen el material con respecto a las dimensiones características de éste. Se define usualmente el vector desplazamiento

$$\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}, \quad (1)$$

donde  $\vec{r}'$  es la nueva posición de un elemento que se encontraba originalmente en una posición  $\vec{r}$ . Luego, la condición para que la elasticidad lineal sea válida es que para todo  $\vec{r}$  que describa un elemento del material, entonces  $|\vec{u}| \ll L_x, L_y, L_z$ , donde  $L_x, L_y$  y  $L_z$  corresponden a las dimensiones espaciales del material. Es importante notar que al igual que para el modelo de una cuerda, se considera al sólido como un medio continuo ( $\vec{r}$  es una variable real) de manera que existen muchos elementos (átomos) en un elemento de volumen que es pequeño no comparado con el sólido y que tiene posición  $\vec{r}$  tal que tiene sentido definir cantidades físicas para este elemento.

Se define el esfuerzo aplicado sobre un material como la fuerza aplicada por unidad de área. El esfuerzo puede ser de compresión, de estiramiento, o de cizalle<sup>1</sup>. Las posibles combinaciones de

---

<sup>1</sup>El simple hecho de romper un papel es un ejemplo de un esfuerzo de cizalle — también conocido como esfuerzo de corte — es tan grande que el material se fractura, se rompe, donde la elasticidad lineal ha dejado de ser válida por supuesto.

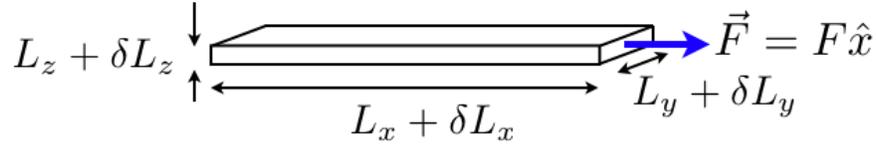


Figura 1: Esquema de un sólido elástico que se estira con un esfuerzo  $F/A$ , donde  $F$  es la fuerza aplicada y  $A$  el área sobre el cual se aplica. El sólido elástico se estira una distancia  $\delta L_x$  a lo largo de la dirección del esfuerzo. En principio, el sólido debe modificar sus otras dimensiones también.

los esfuerzos posibles, como también los resultados de las deformaciones inducidas, hacen que el tratamiento matemático de un sólido elástico sea bastante más complejo que el de una simple cuerda bajo tensión. Luego, por el momento no se detallará la descripción matemática de un sólido elástico.

Un ejemplo sencillo que puede ser abordado es el de la deformación homogénea de un sólido como el que se muestra en la figura 1. Inicialmente las dimensiones de este paralelepípedo son  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$ . Se aplica entonces un esfuerzo de tipo estiramiento tal que  $L_x \rightarrow L_x + \delta_x$ , con  $\delta L_x \ll L_x$ . Si en cambio se aplica un esfuerzo de compresión, solo hay que cambiar  $\delta L_x$  por  $-\delta L_x$ .

Dos preguntas muy simples son entonces: i) ¿Cuál es el valor de  $\delta L_x$ ? ii) ¿Qué pasa en las direcciones transversales al estiramiento? Las respuestas son relativamente simples, aunque considerando lo que ya se argumentó, no son directos de demostrar. Se puede entonces demostrar

$$\frac{\delta L_x}{L_x} = \frac{1}{E} \frac{F}{A}, \quad (2)$$

$$\frac{\delta L_y}{L_y} = -\nu \frac{\delta L_x}{L_x}, \quad (3)$$

$$\frac{\delta L_z}{L_z} = -\nu \frac{\delta L_x}{L_x}. \quad (4)$$

Aquí se han introducido dos propiedades mecánicas del material, el Módulo de Young  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . El Módulo de Young tiene, como otras constantes elásticas, unidad de presión. Es el equivalente de la rigidez de un resorte frente a una compresión o un estiramiento, siendo siempre  $E > 0$ . Por otro lado, el coeficiente Poisson nos dice que las deformaciones transversales se relacionan con la deformación de estiramiento mediante un factor que depende del material. Se sabe que  $\nu$  está acotado entre  $-1$  y  $1/2$ , aunque en general es  $> 0$ . Esto implica que las dimensiones transversales se contraen cuando el sólido se estira en la dirección del esfuerzo. Por último, estas tres ecuaciones no son otra cosa que una versión de la Ley de Hooke para un sólido elástico, pues todas dicen que la deformación es proporcional a la fuerza aplicada.

Al igual que un fluido, un sólido elástico puede propagar ondas. Un ejemplo son las ondas sísmicas. La ecuación dinámica para la deformación de un sólido elástico es la ecuación de Newton. Esta ecuación tiene una forma matemática similar a la ecuación de ondas, pero dada la naturaleza tridimensional del problema y a los diferentes tipos de esfuerzos que pueden producir deformaciones diferentes, su forma es más complicada. En resumen se puede decir que al igual que una cadena

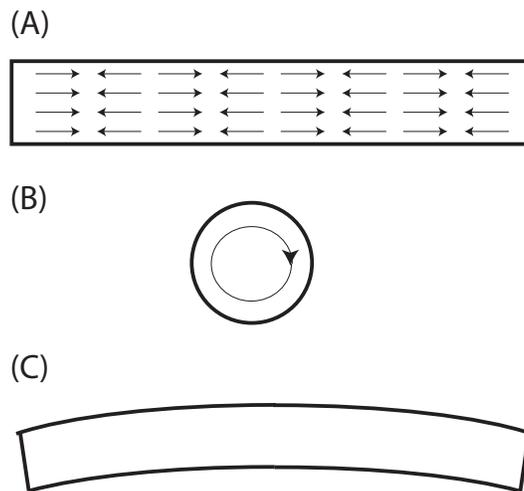


Figura 2: Posibles modos de vibración de una barra delgada, en este caso un cilindro. (A) Modo longitudinal; (B) Modo de torsión; (C) Modo de flexión.

de resortes, un sólido elástico puede propagar ondas de longitudinales (es decir de compresión y estiramiento) donde la dirección de propagación es paralela a la dirección de deformación, como también ondas transversales (de cizalle) donde la dirección de propagación es perpendicular a la dirección de deformación.

### 1.3. Modos de resonancia de una barra elástica

Describiremos las deformaciones elásticas de una barra en el cuadro de la elasticidad lineal, válido para deformaciones muy pequeñas respecto a las dimensiones características del sistema. Tal como en una cuerda de cierta densidad lineal bajo una tensión con condiciones de borde dadas, un tubo lleno con un gas o un simple instrumento musical (de aire o de cuerda), una barra metálica presenta modos propios de vibración, y por ende frecuencias naturales de oscilación.

Se sabe que una barra sólida tiene diversos tipos de modos de vibración. En el caso de una *barra delgada* estos modos pueden clasificarse de la siguiente manera: de flexión, de torsión, o de deformaciones longitudinales. Estos modos se muestran en la figura 2. Cada modo tiene a su vez un conjunto de frecuencias asociadas, según las longitudes de onda que pueden estar presentes. Por ejemplo, un modo de vibración longitudinal puede tener una longitud de onda igual al largo de la barra, a un medio, a un tercio o a un cuarto de longitud de la barra, como el que se muestra en la figura 2a, etc. El conjunto de frecuencias de todos estos modos de vibración es lo que llamaremos espectro de frecuencias de resonancia de un sólido. El hecho de que sea una barra delgada significa que las deformaciones no tienen una dependencia en las coordenadas transversas de la barra. Esta aproximación es importante desde el punto de vista analítico pues, como veremos luego, en este caso se pueden obtener fórmulas analíticas para las frecuencias de los diferentes tipos de modos.

Es importante notar que al igual que para una cuerda, las frecuencias de resonancia dependen de

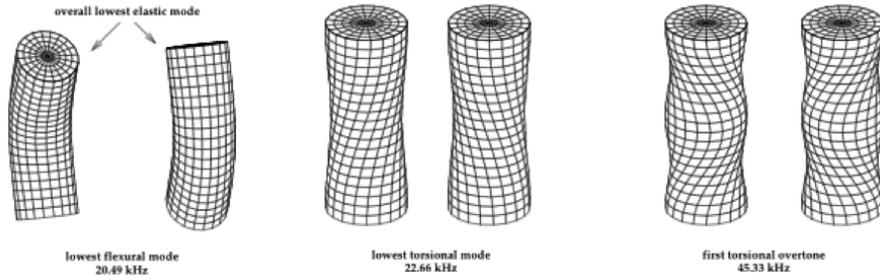


Figura 3: Ejemplos de modos de vibración. Primer modo de flexión (izquierda), primer modo de torsión (centro) y segundo modo de torsión (derecha).

las condiciones (generalmente de borde) que se aplican a una barra. Para los modos longitudinales y de torsión las condiciones de borde son las usuales: libres o fijas. Para los modos de flexión se debe especificar además si el extremo está *empotrado o no*, lo que equivale a imponer si la derivada de la deformación con respecto a la coordenada a lo largo de la barra es constante (por ejemplo cero) o libre.

La ecuación de onda que describe deformaciones  $u_x(x)$  de una barra de dimensiones transversales pequeñas comparadas con su largo se escribe

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

donde se ha asumido que las deformaciones sólo van en la dirección del eje de la barra (eje  $x$ ) y que sólo dependen de esta coordenada, es decir  $\vec{u}(x, y, z) = u_x(x)\hat{x}$ . De esta ecuación se reconoce una velocidad de onda efectiva  $c = \sqrt{E/\rho}$ .

En lo que sigue nos preocuparemos de condiciones de borde simples, similares a las de una cuerda. El espectro de frecuencias de resonancia de los modos longitudinales de una barra completamente libre<sup>2</sup> está dada por la relación

$$f_n^L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{n}{2L}, \quad (6)$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\rho$  la densidad de masa y  $L$  el largo de la barra. Por lo tanto el modo fundamental correspondiente a  $n = 1$  tiene una frecuencia de resonancia  $f_1 = \sqrt{(E/\rho)}/(2L)$ , lo que corresponde a una longitud de onda igual a 2 veces el largo de la barra ( $f_n \lambda_n = c$ ). En el caso de una barra delgada de acero de 1 m de largo,  $E \approx 200 \text{ GPa} = 200 \times 10^9 \text{ Pa}$ , y  $\rho \approx 8 \text{ g/cm}^3 = 8000 \text{ kg/m}^3$ , por lo tanto el primer modo longitudinal ( $n=1$ ) tendrá una frecuencia  $f_1 \approx 2500 \text{ Hz}$ .

A su vez, los modos de torsión para una barra libre de esfuerzos tienen frecuencias dadas por

$$f_n^T = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \frac{n}{2L}. \quad (7)$$

<sup>2</sup>se puede pensar que de alguna manera la barra está suspendida en el espacio sin esfuerzos aplicados.

Por último, los modos de flexión para la misma barra libre tienen frecuencias dadas por

$$f_n^B = \frac{\pi R}{16L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot (2n + 1)^2, \quad (8)$$

con  $R$  el radio de la barra.

#### 1.4. Series de Fourier

En muchas situaciones se tiene una señal temporal que se desea analizar que no es sinusoidal. Sin embargo, para ciertos tipos de análisis, por ejemplo un oscilador forzado o un filtro de frecuencia u otro circuito eléctrico, se considera que la señal que se impone (de forzaje en el caso del oscilador o de voltaje en un circuito) es sinusoidal. Esto se debe a que el tratamiento matemático es más simple. Pero también a que gracias al Teorema de Fourier se tiene que cualquier señal periódica puede ser descompuesta en una serie de funciones sinusoidales. Si el sistema que se está estudiando es lineal, de modo que se cumple el principio de superposición, entonces este teorema es de gran utilidad pues al estudiar la respuesta a una frecuencia, se puede construir la respuesta más general como la superposición de las respuestas individuales.

El Teorema de Fourier establece que una función periódica  $F(t)$ , tal que  $F(t + T) = F(t)$ , puede ser descompuesta en la serie

$$F(t) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n f_o t) + B_n \sin(2\pi n f_o t)), \quad (9)$$

donde  $f_o = 1/T$  es la frecuencia más baja y  $A_o/2$  es la componente continua (constante) de la señal. Esta definición es consistente con otras definiciones que aparecen en la literatura, como

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos(2\pi n f_o t) + b_n \sin(2\pi n f_o t)), \quad (10)$$

donde  $A_n = a_n + a_{-n}$  y  $B_n = b_n - b_{-n}$ .

La figura 4 muestra un ejemplo de tal descomposición. Una señal cuadrada de frecuencia  $f$  se representa como la suma de sinusoides de frecuencia  $f$  y  $3f$  (figura 4a), como la suma de sinusoides de frecuencias  $f$ ,  $3f$  y  $5f$  (figura 4b) y finalmente como suma de sinusoides de frecuencia  $f$ ,  $3f$ ,  $5f$ ,  $7f$  y  $9f$  (figura 4c), siendo que la verdadera señal cuadrada tiene todas las componentes.

En la práctica es de gran utilidad realizar esta descomposición, de manera de obtener las amplitudes  $A_n$  y  $B_n$  para una señal dada. Esto es cierto incluso para señales que no son periódicas. Esto se logra repitiendo la señal a analizar muchas veces usando ventanas de empalme, de modo que la señal sea periódica.

Para poder realizar la descomposición de una señal cualquiera  $F(t)$  en amplitudes de Fourier  $A_n$  y  $B_n$ , es importante usar la ortogonalidad de las funciones sinusoidales. Esto se traduce en las

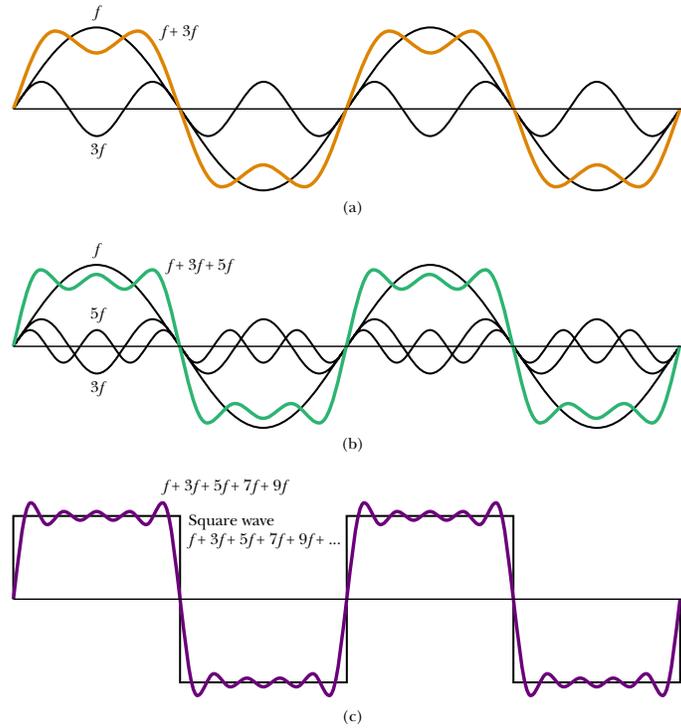


Figura 4: Ejemplo de descomposiciones de una se ñal cuadrada en una suma finita de sinusoides de frecuencias impares. Mientras más terminos se consideran, mejor es la descomposición.

siguientes relaciones:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt = 0, \quad (12)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0. \quad (13)$$

Aquí,  $n \neq m$ . En el caso de que  $n = m$ , las primeras dos ecuaciones son

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi n f_o t) dt = \frac{1}{2}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi n f_o t) dt = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Usando estas relaciones y la serie (10), es directo demostrar

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \cos(2\pi n f_o t) dt, \quad (16)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \sin(2\pi n f_o t) dt. \quad (17)$$

En la práctica se suele usar una notación compleja, de manera que

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i f_o t}, \quad (18)$$

donde  $C_n$  es un número complejo, de modo que  $C_n = C_{-n}^*$  para que  $F(t)$  sea real. Luego, la relación inversa es

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \cdot e^{-2\pi i n f_o t} dt. \quad (19)$$

Esta definición tiene la ventaja de tratar con una sola amplitud, pero compleja. Tiene por lo tanto asociada un valor absoluto y una fase.

Los algoritmos numéricos usan una versión de esta última definición. Deben tratar con señales discretas por lo que hay una cota superior al número  $n$  para la serie dada por la ecuación (10). Esta cota está dada por la frecuencia de adquisición de la señal a analizar. Si se toman  $N$  datos a un intervalo de tiempo  $\Delta t$  (frecuencia de adquisición  $f_s = 1/\Delta t$ ), entonces la frecuencia mínima es  $f_o = 1/T = 1/(N\Delta t)$ , la máxima es  $f_{n_{\max}} = 1/(2\Delta t)$ . La resolución en frecuencia es  $\Delta f = f_{n+1} - f_n = f_o$ .

### 1.5. Ejemplo de uso de series de Fourier

En la guía práctica asociada a esta unidad se analizará el espectro de resonancia de una barra metálica mediante la técnica de impulsión. Se trata de dar un golpe a una barra suspendida (como el golpe a una campana) lo cual puede considerarse como una excitación impulsiva. El límite de esta excitación corresponde a un impulso instantáneo, de duración nula y de intensidad infinita, de modo que su integral es finita. Matemáticamente esto corresponde a considerar una Delta de Dirac  $\delta(t)$ , definida como

$$\delta(t) = 0, \text{ si } t \neq 0, \quad (20)$$

$$\delta(t) = \infty, \text{ si } t = 0, \quad (21)$$

$$(22)$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (23)$$

Usando esta última definición y la ecuación (19), es simple demostrar que  $C_n = 1$  para todo  $n$ . Luego, en nuestro ejemplo, un golpe excita todas las frecuencias, y las que se amplifican son aquellas que corresponden a frecuencias de resonancia de la barra. Éstas frecuencias serán las que sobresalen en un análisis de frecuencia de cualquier señal que se mida en la barra (oscilación, deformación, aceleración o el sonido emitido como se propone en la guía de laboratorio).

### 1.6. Equivalencia con descripción usada en cursos matemáticos

Una pregunta que nace recurrentemente en este curso es sobre la equivalencia de las descripciones realizadas en los cursos matemáticos y físicos, donde en los primeros la definición de serie de Fourier

se hace con funciones periódicas en un intervalo  $-L/2$  a  $L/2$  y de período  $L$ . En este caso la función general es  $F(x) = F(x + L/2)$ . Estas descripciones son efectivamente iguales, teniendo su origen y uso tal vez en simples deformaciones de cada ámbito. En Física, y en tratamiento de se nales, se suele tratar con series temporales, el origen temporal es en ocasiones es relevante, por lo que las funciones se definen entre  $0$  y  $T$ . Pero como veremos esto no es esencial. En Matemáticas, es posible que el apego a simetrías haga usar la definición recién presentada.

Consideremos la función periódica  $F(t) = F(t + T)$  de la figura 5. En el lado izquierdo se presenta esta función en la descripción usual que hemos adoptado. En rojo se destaca la parte de la función entre  $0$  y  $T$ . Se muestran además los ejes coordenados  $(t, y)$ . En el lado derecho se muestra un sistema de referencia desplazado en la dirección  $t$  en medio período. En este sistema coordenado se llama el eje horizontal  $x$ , por lo que se trata de un par de ejes  $(x, y)$ . Se trata simplemente entonces de un cambio de variable:

$$x = t - \frac{L}{2}. \quad (24)$$

Donde además se impone  $T = L$ . Luego, la función  $F$  sigue siendo periódica pero ahora definida desde un nuevo sistema de coordenadas. El hecho de pasar de  $t$  a  $x$  no debe prestarse a confusión, las variables son mudas.

Para mostrar la equivalencia entre las descripciones revisemos las ecuaciones 11 a la 15, que se pueden resumir como

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = \frac{\delta_{nm}}{2}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \sin(2\pi m f_o t) dt = \frac{\delta_{nm}}{2}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = 0. \quad (27)$$

Tomemos la primera de ellas y apliquemos el cambio de variable anterior. Entonces,  $dx = dt$ , cuando  $t = 0 \rightarrow x = -L/2$ , y cuando  $t = T \rightarrow x = L/2$ . Queda entonces

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos(2\pi n f_o (x + L/2)) \cdot \cos(2\pi m f_o (x + L/2)) dx, \quad (28)$$

donde  $f_o = 1/T = 1/L$ . Las funciones coseno quedan

$$\cos(2\pi n f_o (x + L/2)) = \cos(2\pi n f_o x) \cos(2\pi n f_o L/2) - \sin(2\pi n f_o x) \sin(2\pi n f_o L/2) \quad (29)$$

$$= \cos(2\pi n f_o x) \cos(n\pi) - \sin(2\pi n f_o x) \sin(n\pi) \quad (30)$$

$$= \cos(2\pi n f_o x) (-1)^n. \quad (31)$$

Entonces,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\pi n f_o t) \cdot \cos(2\pi m f_o t) dt = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos(2\pi n f_o x) \cdot \cos(2\pi m f_o x) (-1)^{n+m} dx. \quad (32)$$

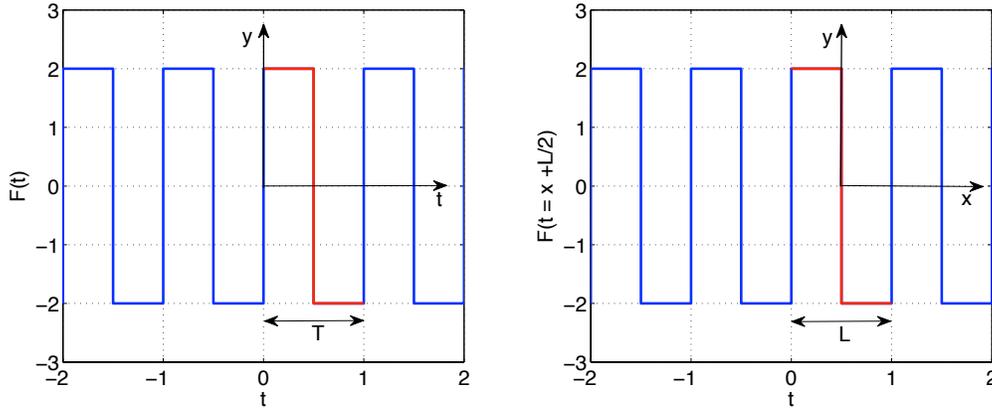


Figura 5: Ejemplo de la conversión entre descripciones realizadas en cursos Físicos y Matemáticos, ambas descripciones tratan la misma función periódica, de período  $T = L = 1$  en este caso.

Pero originalmente esto es igual a  $\delta_{nm}/2$ . Como  $(-1)^{n+m} = 1$  cuando  $m = n$ , se tiene

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos(2\pi n f_o x) \cdot \cos(2\pi m f_o x) dx = \frac{\delta_{nm}}{2}. \quad (33)$$

Demostraciones análogas pueden ser entonces hechas para las otras dos ecuaciones (26) y (27). Finalmente, la función periódica puede ser descrita por

$$F(x) = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n x/L) + B_n \sin(2\pi n x/L)), \quad (34)$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) \cdot \cos(2\pi n x/L) dx, \quad (35)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} F(x) \cdot \sin(2\pi n x/L) dx. \quad (36)$$