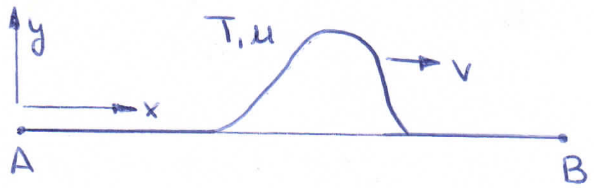
CÁTEDRA PASADA



T : tensión de la cuerda

μ : densidad lineal de masa

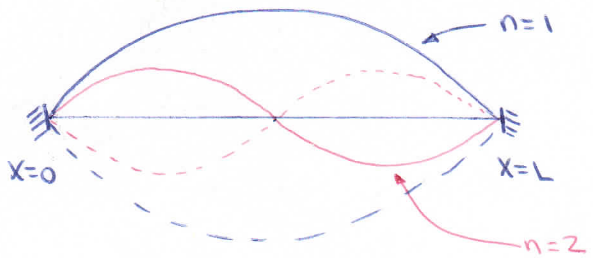
El movimiento de la perturbación u onda que viaja a través de la cuerda puede ser representado por la función de onda $y = f(x \pm vt)$

con $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, y satisfaciendo la ecuación de onda $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Para el caso de un movimiento sinusoidal confinado entre los extremos fijos de una cuerda de longitud L, vimos que la función de onda resultante puede ser representada por

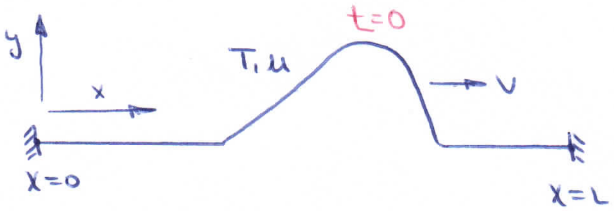
$$\boxed{y_{(x,t)} = 2A\,\mathrm{sen}(k_n x)\cos(\omega_n t)}$$ Onda Estacionaria

donde: $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, $\omega_n = v k_n$, $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$



Por tanto, una cuerda confinada entre x=0 y x=L tiene la propiedad que puede tener movimientos sinusoidales solo en determinadas frecuencias.

En general, el movimiento de una onda periódica (el cual es un sistema lineal), cualquiera sea esta, puede ser analizado asumiendo que ella está compuesta por la suma de los movimientos de todos los posibles modos normales con apropiados amplitudes y fases.



$$\boxed{y_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, \mathrm{sen}(k_n x) \cos(w_n t)}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad w_n = v k_n$$

En t=0: $\quad y(x,0) = B_1 \, \mathrm{sen}(k_1 x) + B_2 \, \mathrm{sen}(k_2 x) + \ldots$

$$y(x,0) = B_1 \, \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{L} x\right) + B_2 \, \mathrm{sen}\left(2\frac{\pi}{L} x\right) + \ldots \qquad \left(= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, \mathrm{sen}\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \, ? \right)$$

Por tanto el sistema comenzara a oscilar en la superposición de los modos normales, las cuales son ondas estacionarias. La pregunta es: En cuales modos el sistema oscilara y cuáles son las amplitudes de dichos modos?

Como nada nos garantiza de que los modos normales estén en fase, entonces

$$\mathrm{sen}(x + \varphi) = \mathrm{sen}\, x \cos\varphi + \cos x \, \mathrm{sen}\,\varphi = a \cos x + b \, \mathrm{sen}\, x$$

$$\Rightarrow f(x) = A_0 + B_1 \left(a_1 \cos\frac{\pi x}{L} + b_1 \, \mathrm{sen}\frac{\pi x}{L} \right) + B_2 \left(a_2 \cos\frac{2\pi x}{L} + b_2 \, \mathrm{sen}\frac{2\pi x}{L} \right) + \ldots$$

$$f(x) = A_0 + \left[A_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + A_2 \cos\left(2\frac{\pi x}{L}\right) + \ldots \right] + \left[B_1 \, \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + B_2 \, \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \ldots \right]$$

$$\Rightarrow f(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(m \frac{\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \, \mathrm{sen}\left(m \frac{\pi x}{L}\right)$$

donde hemos adherido el término A_0 para la "frecuencia cero".

ANÁLISIS DE FOURIER

La idea por tras del análisis de Fourier es que cualquier función periódica de una única variable con periodo 2π, puede ser representada por una serie de Fourier de la forma

$$\boxed{f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}(mx)} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Entonces, para calcular los coeficientes tenemos que conocer la función $f(x)$.

$\underline{\underline{A_0}}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{A_0}{2}\int_0^{2\pi} dx + \sum_{m=1}^{\infty} \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} A_m \cos(mx)\,dx} + \sum_{m=1}^{\infty} \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} B_m \operatorname{sen}(mx)\,dx}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx}$$

Por tanto, $\frac{A_0}{2}$ representa el valor médio de f sobre el periodo 2π.

$\underline{\underline{A_m}}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{A_0}{2}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} \cos(nx)\,dx} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} A_m \cos(mx)\cos(nx)\,dx}_{\text{es cero menos para } m=n} + \sum_{m=1}^{\infty} \cancelto{0}{\int_0^{2\pi} B_n \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)\,dx}$$

si $m=n \Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) = \pi$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\,dx} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Cuando $m=0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$!

B_m

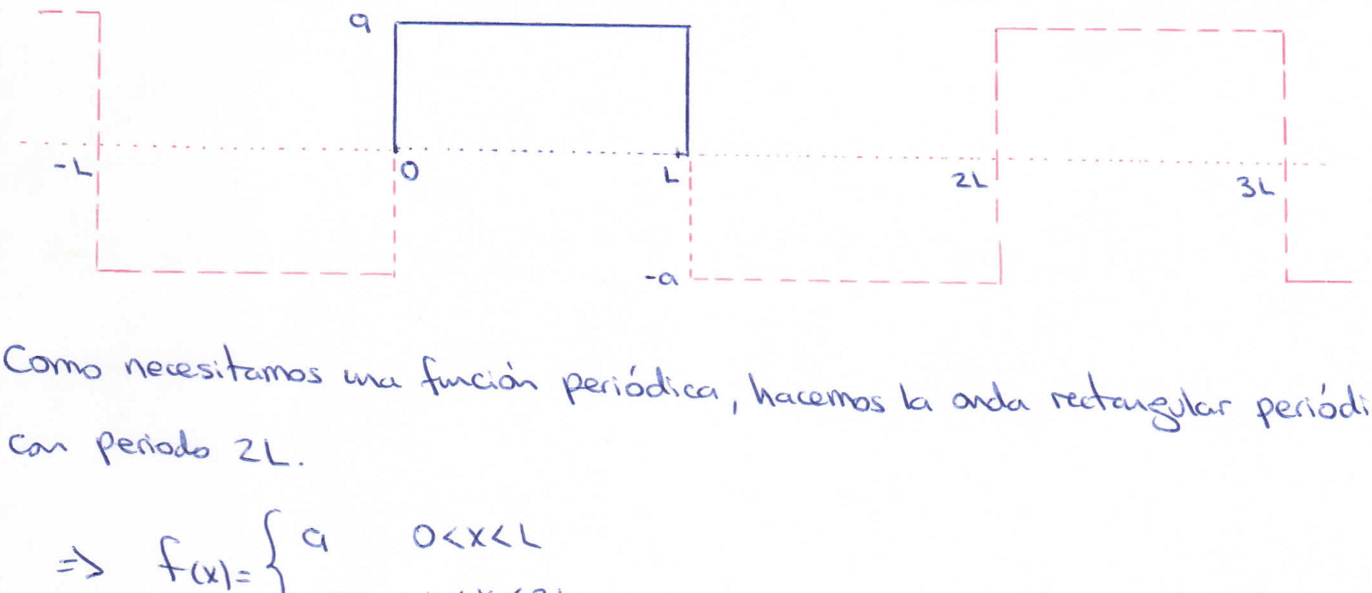
$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{A_0}{2}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}(nx)\,dx} + \sum_{m=1}^{\infty}\cancelto{0}{\int_0^{2\pi} A_m \cos(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx} + \sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^{2\pi} B_n\,\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx}_{\text{es cero menos para } m=n}$$

si $m=n \Rightarrow \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(nx) = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(mx)\,dx}$$

Ejemplo

Supongamos que nuestra cuerda toma la forma de una onda rectangular tal como es mostrado en la figura. Queremos expresar la onda rectangular en una serie de Fourier con sus amplitudes y fases determinadas.



Como necesitamos una función periódica, hacemos la onda rectangular periódica con periodo $2L$.

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} a & 0 < x < L \\ -a & L < x < 2L \end{cases}$$

$\frac{A_0}{2} = 0$ (ya que el promedio de f en un periodo es cero).

El argumento de la ecuación (1) esta expresado en radianes con periodo 2π mientras que el de la cuerda en metros con periodo $2L$. Haciendo el cambio de coordenadas:

$$X\ (rad) \longrightarrow \frac{\pi}{L} X\ (m)$$

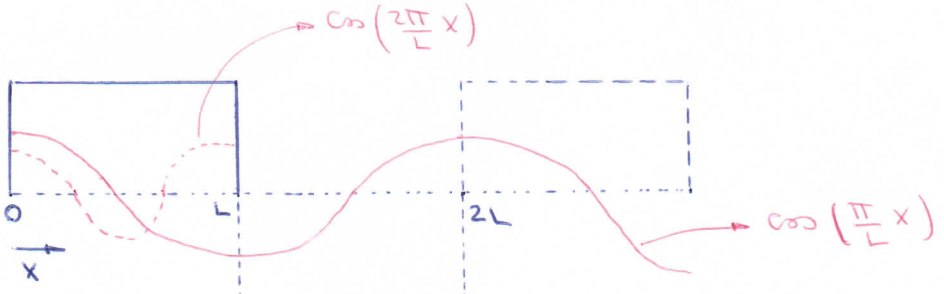
$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(m\frac{\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}\left(m\frac{\pi x}{L}\right)$$

y la integral: $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \longrightarrow \frac{1}{L}\int_0^{2L}$$

$$\Rightarrow \quad A_m = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x) \cos\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$B_m = \frac{1}{L}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}\left(m\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$A_m = \frac{1}{L}\left[\cancelto{0}{a\int_0^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx} - \cancelto{0}{a\int_L^{2L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}\right] = 0$$



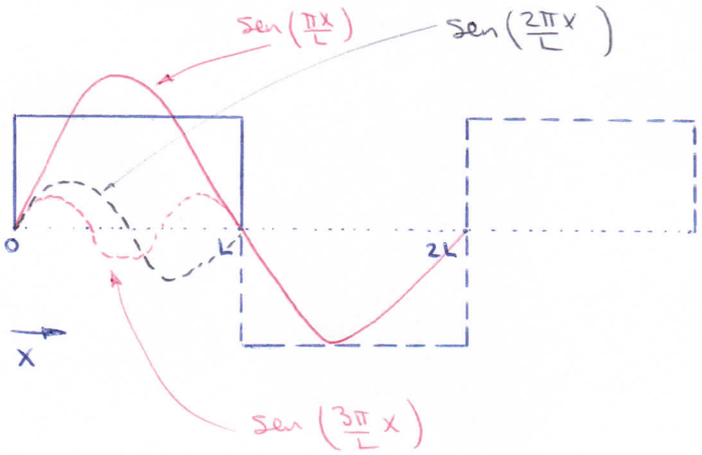
Como vemos en la figura, ninguno de los términos $\cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right)$ contribuye para la construcción de la onda rectangular, por tanto es de esperar que ellos se cancelen.

$$B_m = \frac{1}{L}\left[\int_0^L a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx - \int_L^{2L} a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right]$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{a}{L}\left(\frac{L}{m\pi}\right)\left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\Big|_L^{2L} - \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\Big|_0^L \right]$$

$$B_m = \frac{a}{m\pi}\left[\cancelto{1}{\cos(2\pi m)} - \cos(m\pi) - \cos(m\pi) + 1 \right] = \frac{2a}{\pi m}\left[1 - \cos m\pi \right]$$

$$\Rightarrow B_m = \begin{cases} 0 & m: \text{par} \\ \dfrac{4a}{m\pi} & m: \text{impar} \end{cases}$$



Como vemos en la figura, ninguno de los terminos pares de $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ contribuye para la construcción de la onda rectangular.

$$\Rightarrow f(x) = B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + B_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + B_5\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots$$

$$\boxed{f(x) = \frac{4a}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{4a}{3\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{4a}{5\pi}\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots}$$

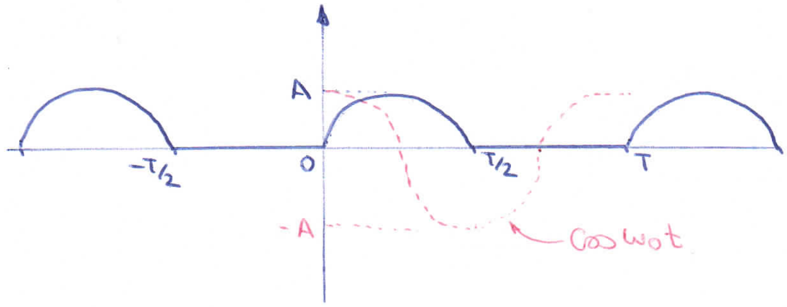
Estas son las componentes de Fourier de la cuerda en $t = 0$!

$$\Rightarrow y(x,t) = \frac{4a}{\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos \omega_1 t + \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cos \omega_3 t + \dots \right]$$

con $\omega_m = v k_m$ y $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Problemas

① $f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ A \operatorname{sen} \omega_0 t & 0 < t < T/2 \end{cases}$ $\quad f(t+T) = f(t)$



$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen}(mx)$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \quad A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx \quad B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \rightarrow \frac{1}{T/2}\int_0^{T} \qquad X \rightarrow \omega_0 t$$

$$\Rightarrow A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \quad A_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega_0 t)dt \quad B_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(m\omega_0 t)\,dt$$

$\underline{\underline{A_0}}$

$$A_0 = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(t)dt + \cancelto{0}{\int_{T/2}^{T} f(t)dt}\right] = \frac{2A}{T}\int_0^{T/2}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\,dt = -\frac{2A}{\omega_0 T}\left[\cancelto{-1}{\cos\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{4A}{\omega_0 T}}$$

$\underline{\underline{A_m}}$

$$A_m = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt + \cancelto{0}{\int_{T/2}^{T} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt}\right] = \frac{2A}{T}\int_0^{T/2}\operatorname{sen}(\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$$

$$A_m = \frac{2A}{T}\int_0^{T/2} \frac{\operatorname{sen}(1+m)\omega_0 t + \operatorname{sen}(1-m)\omega_0 t}{2}\,dt$$

$$\Rightarrow A_m = -\frac{A}{T}\left[\left.\frac{\cos(1+m)\omega_0 t}{(1+m)\omega_0}\right|_0^{T/2} + \left.\frac{\cos(1-m)\omega_0 t}{(1-m)\omega_0}\right|_0^{T/2}\right]$$

$$\Rightarrow A_m = -\frac{A}{\omega_o T}\left[\frac{\cos(1+m)\omega_o\frac{T}{2} - 1}{1+m} + \frac{\cos(1-m)\omega_o\frac{T}{2} - 1}{1-m}\right]$$

Si m es par: $\cos(1+m)\omega_o\frac{T}{2} = -1 = \cos(1-m)\omega_o\frac{T}{2}$

$$\Rightarrow A_m = \frac{2A}{\omega_o T}\left[\frac{1}{1+m} + \frac{1}{1-m}\right] = -\frac{4A}{(m^2-1)\omega_o T}$$

si m es impar (menos $m=1$): $\cos(1+m)\omega_o\frac{T}{2} = 1 = \cos(1-m)\omega_o\frac{T}{2}$

$$\Rightarrow A_m = 0$$

Para $m=1$
$$\left.\frac{\frac{d}{dm}\left[\cos(1-m)\omega_o\frac{T}{2} - 1\right]}{\frac{d}{dm}(1-m)}\right|_{m=1} = 0 \quad\Rightarrow\quad A_1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A_m = \frac{-4A}{(m^2-1)\omega_o T}} \quad m\text{:par}$$

$\underline{B_m}$

$$B_m = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(m\omega_o t)\,dt + \cancelto{0}{\int_{T/2}^{T} f(t)\,\mathrm{sen}(m\omega_o t)\,dt}\right] = \frac{2A}{T}\int_0 \mathrm{sen}(\omega_o t)\,\mathrm{sen}(m\omega_o t)\,dt$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{2A}{T}\int_0^{T/2} \frac{\cos(1-m)\omega_o t - \cos(1+m)\omega_o t}{2}\,dt = \frac{A}{T}\left[\left.\frac{\mathrm{sen}(1-m)\omega_o t}{(1-m)\omega_o}\right|_0^{T/2} - \left.\frac{\mathrm{sen}(1+m)\omega_o t}{(1+m)\omega_o}\right|_0^{T/2}\right]$$

$$\Rightarrow B_m = \frac{A}{\omega_o T}\left[\frac{\mathrm{sen}(1-m)\omega_o\frac{T}{2}}{1-m} - \frac{\mathrm{sen}(1+m)\omega_o\frac{T}{2}}{1+m}\right]$$

$B_m = 0$ para todo m, menos para $m=1$

$$\frac{\frac{d}{dm}\left[\mathrm{sen}(1-m)\omega_o\frac{T}{2}\right]}{\frac{d}{dm}(1-m)} = \frac{-\frac{\omega_o T}{2}}{-1} = \frac{\omega_o T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_1 = \frac{A}{\omega_o T}\left(\frac{\omega_o T}{2}\right) = \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{2A}{\omega_o T} + \sum_{m=\text{par}}\left[\frac{4A}{(1-m^2)\omega_o T}\right]\cos(m\omega_o t) + \frac{A}{2}\,\mathrm{sen}\,\omega_o t}$$