Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
Electromagnetismo FI2002

Solución Auxiliar N°9

Profesor Cátedra: Boris Chornik
Profesores Auxiliares: Jocelyn Dunstan, Felipe Larraín
Fecha: Martes 19 de Octubre

Problema 1

(a) Usando la Ley Circuital de Ampére obtenemos que el campo magnético del alambre está definido por la expresión

$$\overrightarrow{B}(\rho) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat{\theta}$$

Expresamos la fuerza como,

$$\overrightarrow{F} = I\int_{\Gamma} \overrightarrow{dr} \times \overrightarrow{B}$$

donde I es la corriente que circula por el circuito afectado, (el opuesto a quien produce el campo) y el diferencial $\overrightarrow{dr}$ recorre el segmento a considerar en la curva Γ. Así, para los segmentos curvos la integral es nula, puesto que tanto el diferencial de camino como el campo magnético apuntan en direcciones paralelas. Para los segmentos rectos la fuerza es no nula. Para el de la derecha, (según la figura),

$$\overrightarrow{F_1} = I_2\int_a^b d\rho\hat{\rho} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat{\theta} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{k}$$

Para el de la izquierda, (tb. según la figura), y concluyendo después para la fuerza total,

$$\overrightarrow{F_2} = I_2\int_b^a d\rho(\hat{\rho}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat{\theta} = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{F}_T = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = 0$$

(b) Existe torque no nulo sobre el sistema pues, si bien la fuerza total es nula, cada componente de la fuerza está aplicada en distintas posiciones del sistema. Si se considera el eje de éste como el punto en el plano xy del circuito 2 que intersecta el alambre, en la figura aparece una fuerza en $\hat{k}$ a la derecha y en $-\hat{k}$ a la izquierda lo que produce torque.

(c) El torque viene dado por la expresión

$$\overrightarrow{T} = I\int_{\Gamma} \overrightarrow{r} \times (\overrightarrow{dr} \times \overrightarrow{B})$$

Donde nuevamente la corriente I es aquella del circuito afectado por el campo $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{dr}$ es el segmento diferencial que recorre el camino del circuito, y $\overrightarrow{r}$ es el brazo de torque. Para los segmentos rectos de la derecha e izquierda, según la figura, ((1) y (2))

$$\overrightarrow{T_1} = I_2\int_a^b \rho\hat{\rho} \times \left(d\rho\hat{\rho} \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat{\theta}\right) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi}(b-a)(-\hat{\theta}_1)$$

$$\overrightarrow{T_2} = I_2\int_a^b \rho\hat{\rho} \times \left((-d\rho\hat{\rho}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\hat{\theta}\right) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi}(b-a)(\hat{\theta}_2)$$

$$\therefore \overrightarrow{T_{total}} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi}(b-a)(-\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)$$

En términos de los vectores cartesianos,

$$\overrightarrow{T_{total}} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi}(b-a)(sen(\frac{\pi}{2}-\alpha)\hat{\imath} - cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\hat{\jmath} - sen(\frac{\pi}{2}+\alpha)\hat{\imath} + cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\hat{\jmath}) = -\frac{I_1 I_2 \mu_0}{\pi}(b-a)sen(\alpha)\hat{\jmath}$$

Problema 2

Nota: *Este problema se ha interpretado de forma tal que el campo magnético y el campo eléctrico (por la diferencia de potencial entre las placas) actúan en forma simultánea con cada electrón. Existen soluciones en las que se interpreta que la interacción ocurre en forma separada y por tanto las expresiones resultantes son diferentes. Supondremos además que el eje $\hat{k}$ coincide con el eje del tubo, y los ejes $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ son perpendiculares a él.*

(a) El electrón se ve sometido a fuerza eléctrica y fuerza magnética. La fuerza eléctrica dada por el campo que genera la diferencia de potencial entre las placas (cátodo y ánodo) acelera la partícula en la dirección del eje del tubo. La fuerza magnética genera un movimiento curvo en el plano xy. La trayectoria entonces es acelerada en z y recorre el perímetro de una circunferencia en el plano xy (el radio corresponde a la distancia inicial del electrón al centro).

(b) El efecto de enfoque se consigue cuando el electrón alcanza una vuelta completa en el plano xy mientras recorre el tubo en z. De hacer un análisis de fuerzas con newton para la magnitud de la velocidad de giro,

$$\frac{mv^2}{R} = eB_0 v \Rightarrow v = \frac{eB_0 R}{m}$$

De cinemática,

$$v = \frac{2\pi R}{t} = \frac{eB_0 R}{m} \Rightarrow t = \frac{2\pi m}{eB_0}$$

Para el campo eléctrico, dado que se asume que la velocidad inicial y posición iniciales son nulas,

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} = eE_0 \Rightarrow z(t) = \frac{eE_0}{m}\frac{t^2}{2}$$

Si se impone que la distancia atravesada en tiempo t^* es L,

$$z(t = t^*) = L \Rightarrow L = \frac{eE_0}{m}\frac{t^2}{2} = \frac{eE_0}{2m}\left(\frac{2\pi m}{eB_0}\right)^2$$

De esta última expresión, asumiendo que $E_0 = \frac{V}{L}$, podemos despejar B que permite el enfoque,

$$B = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{2Vm}{e}}$$

Problema 3

Calculando por definición, usamos que

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}') \times (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}')}{\| \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}' \|^3} dV'$$

Parametrizando,

$$\overrightarrow{r} = 0$$
$$\overrightarrow{r}' = r\hat{r}$$
$$\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r}') = \rho\overrightarrow{v}$$

Si bien se puede escribir que $\overrightarrow{v} = w\hat{k} \times r\hat{r} = wrsen\theta\hat{\psi}$, para convencerse de este resultado podemos calcular directamente. Recordamos los vectores principales del sistema esférico escritos en coordenadas cartesianas:

$$\hat{r} = (sen\theta cos\psi, sen\theta sen\psi, cos\theta)$$

$$\hat{\theta} = (cos\theta cos\psi, cos\theta sen\psi, -sen\theta)$$

$$\hat{\psi} = (-sen\psi, cos\psi, 0)$$

De la cinemática de una partícula,

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\left(\overrightarrow{r}\right)}{dt} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

Como en este caso particular, dado el giro de las partículas, se cumple que $r = cte$, $\theta = cte_2$ y $\psi = wt$,

$$\overrightarrow{v} = r\frac{d\hat{r}}{dt} = r\frac{d}{dt}\left(sen\theta cos\psi, sen\theta sen\psi, cos\theta\right) = rw\left(-sen\theta sen\psi, sen\theta cos\psi, 0\right) = rwsen(\theta)\left(-sen\psi, cos\psi, 0\right) = rwsen(\theta)\hat{\psi}$$

Obteniendo el mismo valor que el anterior. Planteando entonces la definición,

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r} = 0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\rho rwsen(\theta)\hat{\psi}\times(-r\hat{r})}{r^3}r^2 sen\theta drd\theta d\psi$$

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r} = 0) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r\rho wsen^2\theta\hat{\theta}drd\theta d\psi$$

Resolviendo la integral obtendremos,

$$\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r} = 0) = \frac{\mu_0\rho wR^2}{3}\hat{k}$$

Problema 4

Este problema quedó propuesto. El razonamiento considera conceptos similares a los usados en el problema 2 y se encuentra resuelto en el libro de problemas resueltos del prof. Rafael Benguria.