



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002

ELECTROMAGNETISMO

Clase 3

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



INDICE

- Ley de Gauss
- 1a Ecuación de Maxwell
- Trabajo de campo eléctrico,
- Definición del potencial,
- Relación entre campo eléctrico y potencial



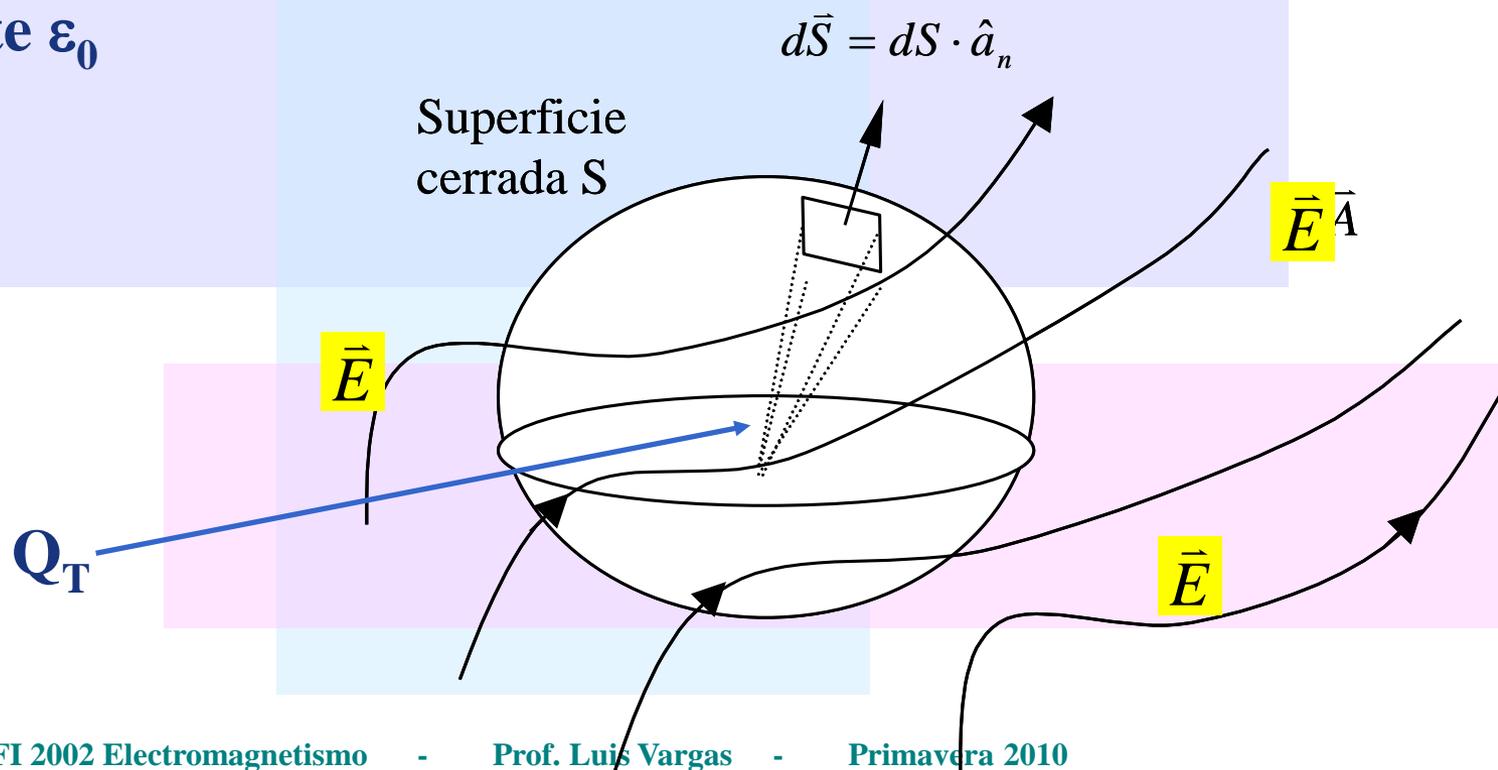
Van Gogh, "Autoretrato
(dedicado a Paul Gauguin),
Arles: Septiembre, 1888



Ley de Gauss

$$\Psi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada S es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_T) dividida por la constante ϵ_0





1ª Ecuación de Maxwell

Dado que

$$Q_T = \iiint_V \rho dv$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Luego, por el teorema de la divergencia

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

Entonces:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Las fuentes de campo son las cargas eléctricas



1ª Ecuación de Maxwell

Se define Vector
Desplazamiento

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Esta ecuación es la 1ª Ecuación de
Maxwell.



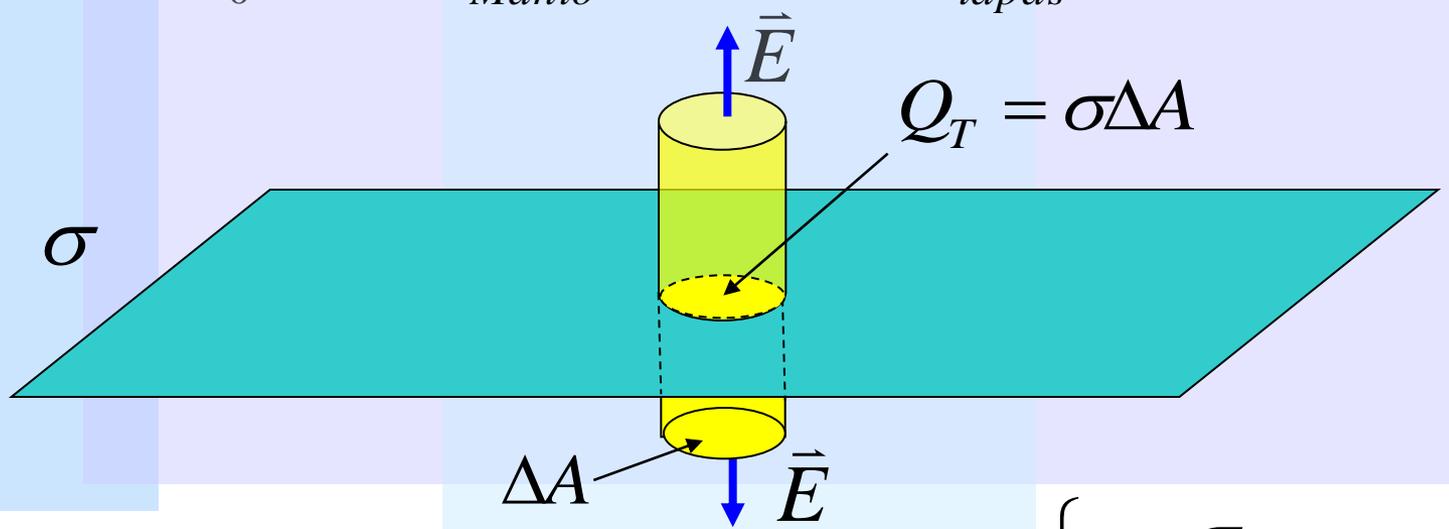
Comentarios sobre la Ley de Gauss

- i) La ley de Gauss es útil cuando hay simetría,**
- ii) La ley de Gauss es válida para todo el espacio,**
- iii) Aplicarla requiere cierta destreza (la que se logra con práctica).**



Comentarios sobre la Ley de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \Rightarrow \iint_{\text{Manto}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0, \quad \iint_{\text{tapas}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\Delta A \|\vec{E}\|$$



$$2\Delta A \|\vec{E}\| = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} \Rightarrow \|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \therefore \vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k} & z < 0 \end{cases}$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss

Caso dos planos: Cargas positivas y $\sigma_1 > \sigma_2$



Hagámoslo primero por superposición



Comentarios sobre la Ley de Gauss

Superposición

σ_1



$$\vec{E}_1 = E_1 \hat{k} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{E}_1 = -E_1 \hat{k}$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss

Superposición

σ_2



$$\uparrow \vec{E}_2 = E_2 \hat{k} = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

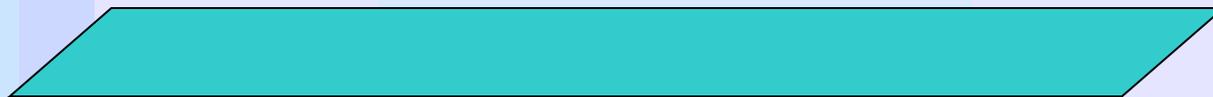
$$\downarrow \vec{E}_2 = -E_2 \hat{k}$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss

Superposición

σ_1



$$\uparrow \vec{E} = (E_1 + E_2)\hat{k}$$

σ_2



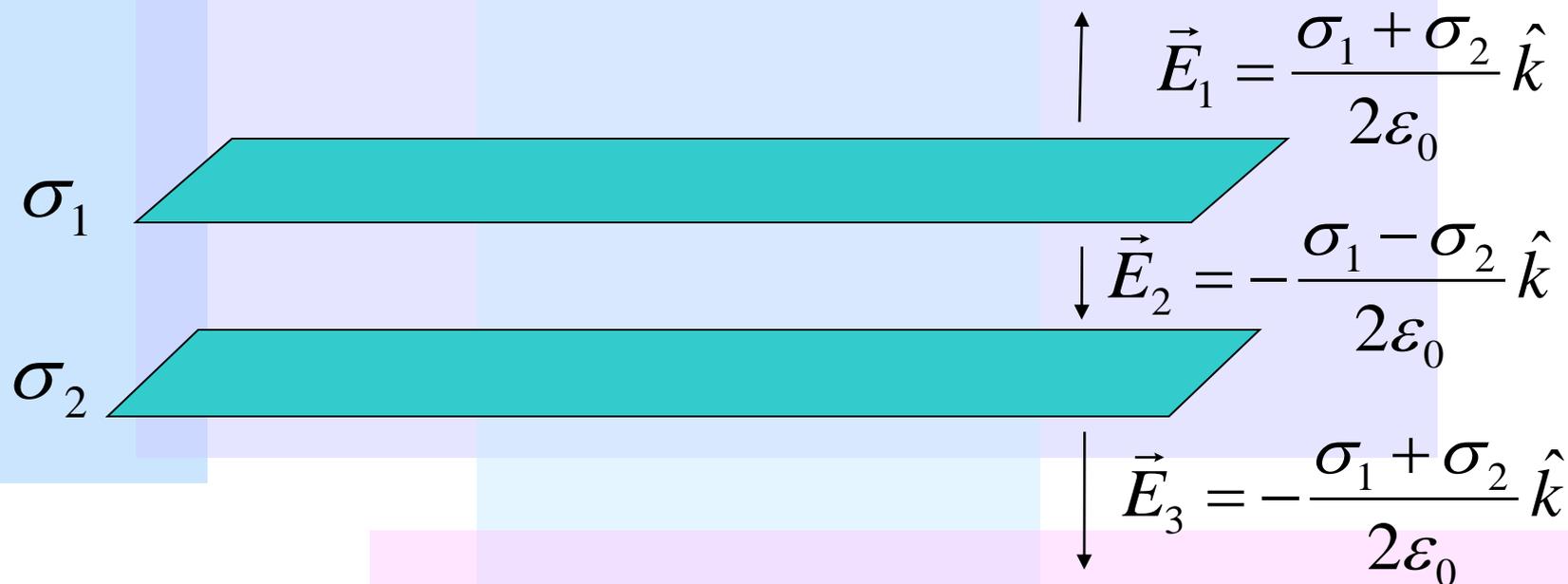
$$\downarrow \vec{E}_2 = -(E_1 - E_2)\hat{k}$$

$$\downarrow \vec{E} = -(E_1 + E_2)\hat{k}$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss

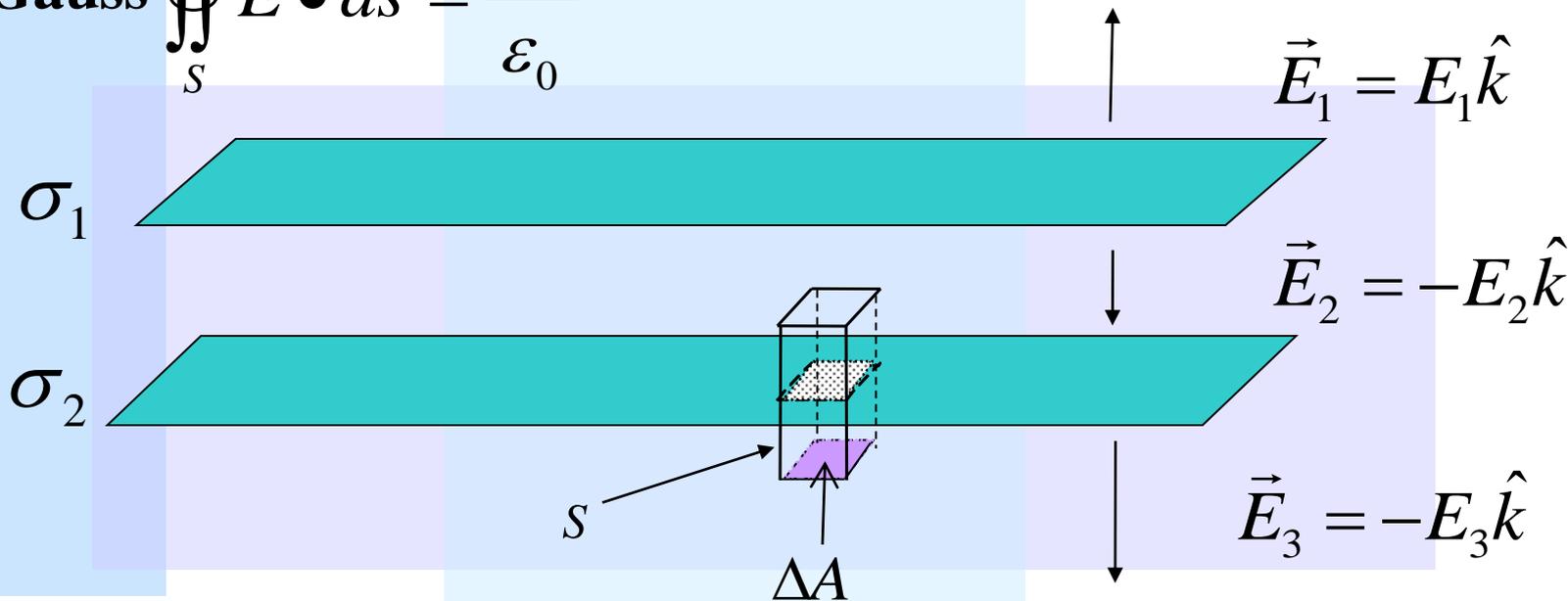
Superposición





Comentarios sobre la Ley de Gauss

Usemos Gauss $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$



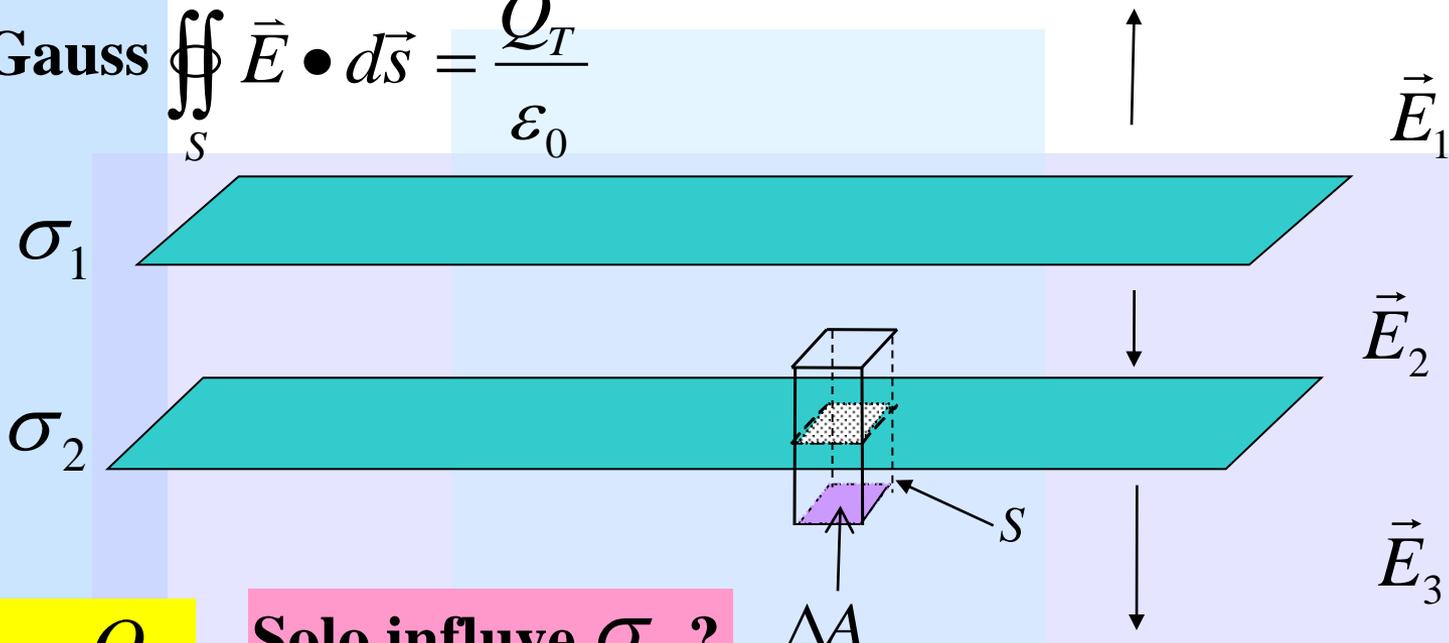
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A \quad \left. \begin{array}{l} Q_T = \sigma_2 \Delta A \\ \end{array} \right\} -E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

OJO: Campos son diferentes!



Comentarios sobre la Ley de Gauss

Usemos Gauss $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

Solo influye σ_2 ?

$$Q_T = \sigma_2 \Delta A$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A$$

$$\left. \begin{array}{l} Q_T = \sigma_2 \Delta A \\ \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_2 \Delta A + E_3 \Delta A \end{array} \right\} -E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

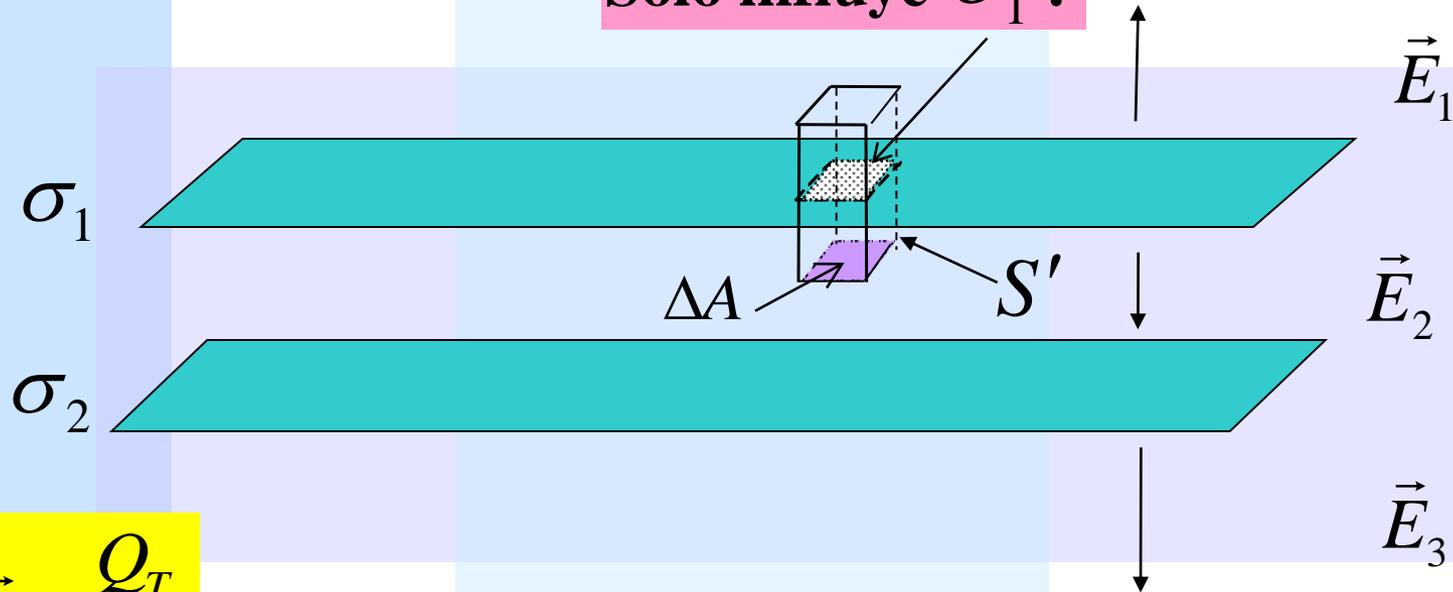
OJO: Campos son diferentes!



Comentarios sobre la Ley de Gauss

Usemos Gauss

Solo influye σ_1 ?

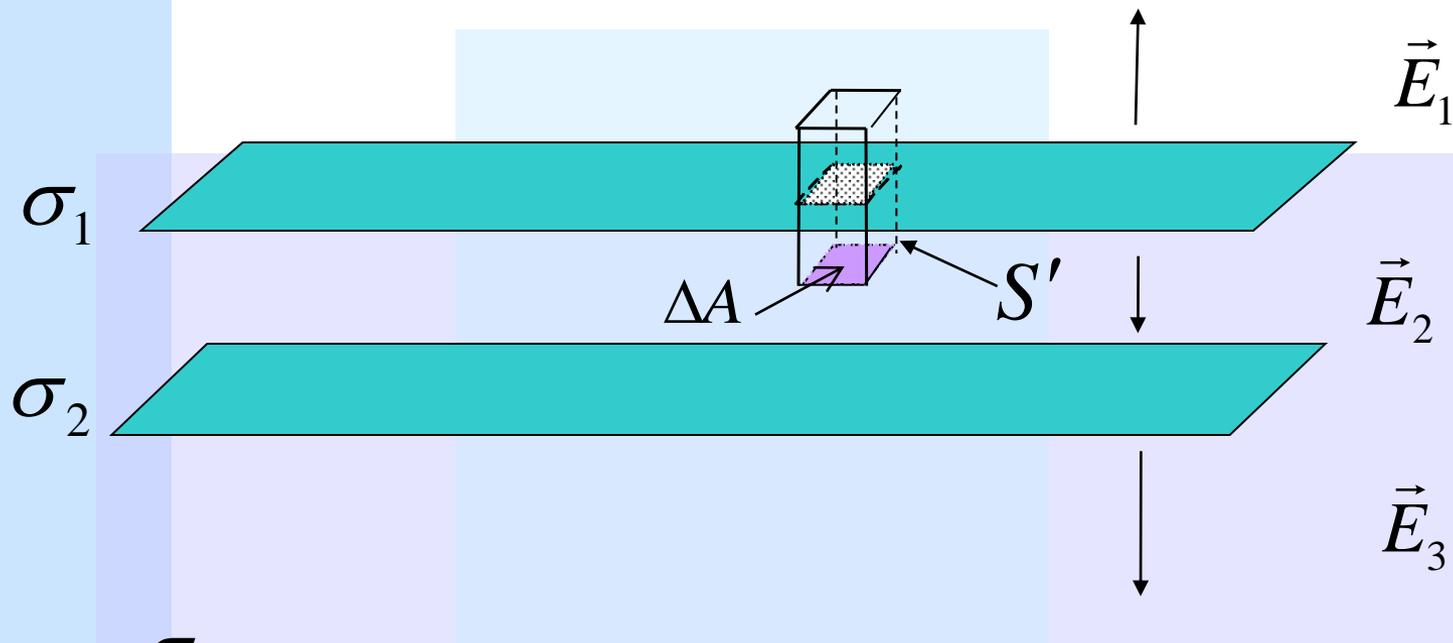


$$\oiint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_T &= \sigma_1 \Delta A \\ \oiint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= E_1 \Delta A + E_2 \Delta A \end{aligned} \right\} E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss



Tenemos

$$-E_2 + E_3 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

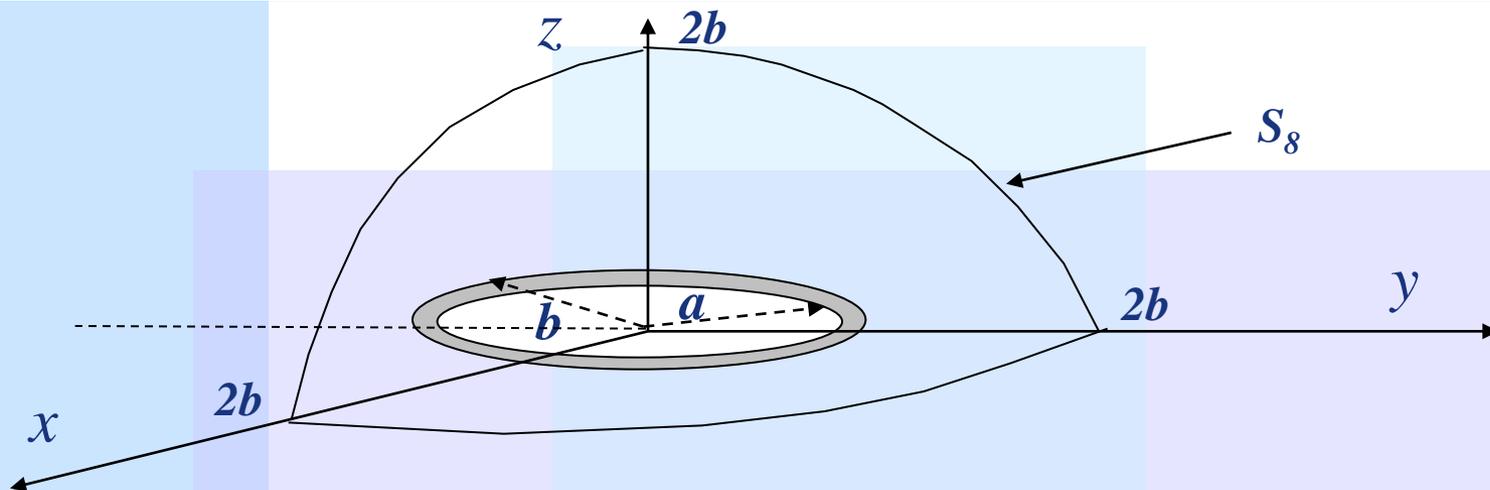
Pero $E_1 = E_3 \Rightarrow$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{k}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \hat{k}$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss

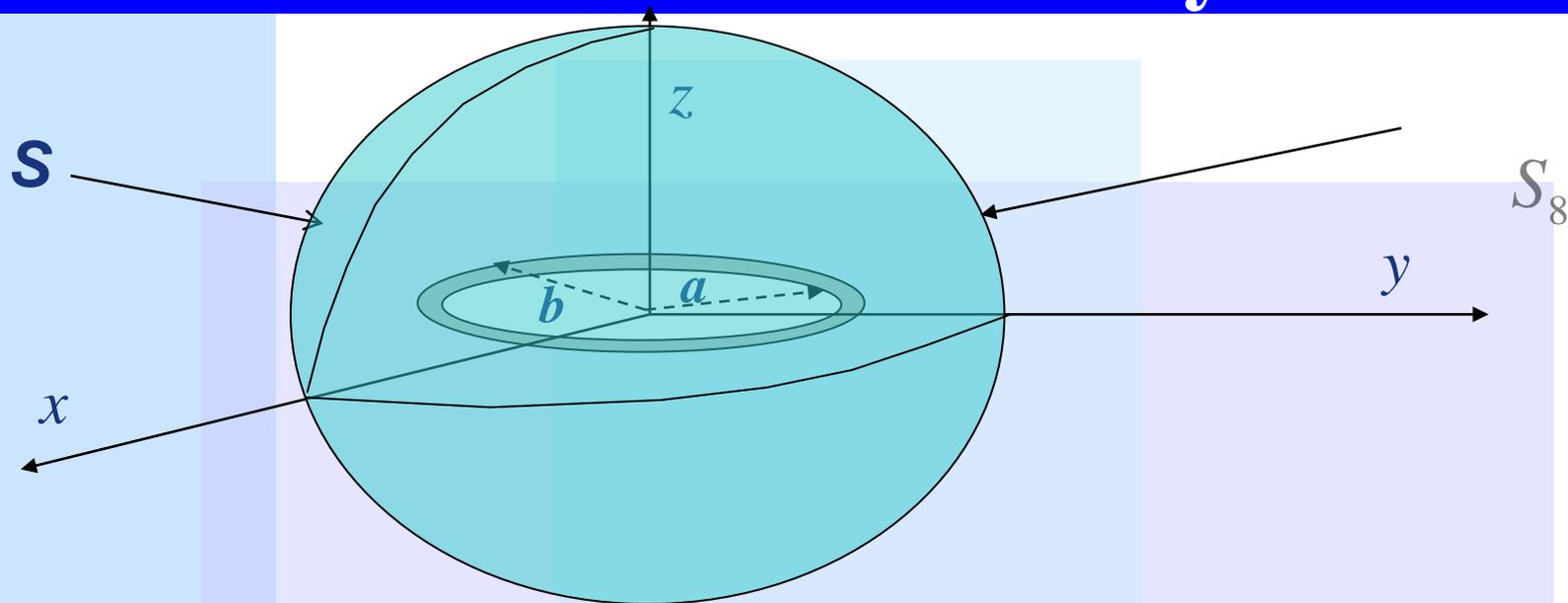


Calcular el flujo de campo eléctrico en la superficie S definida por el segmento de casquete esférico ubicado en el cuadrante $(x > 0, y > 0, z > 0)$ y que intersecta en $x = y = z = 2b$.

$$\iint_{S_8} \vec{E} \cdot d\vec{s} = ?$$



Comentarios sobre la Ley de Gauss



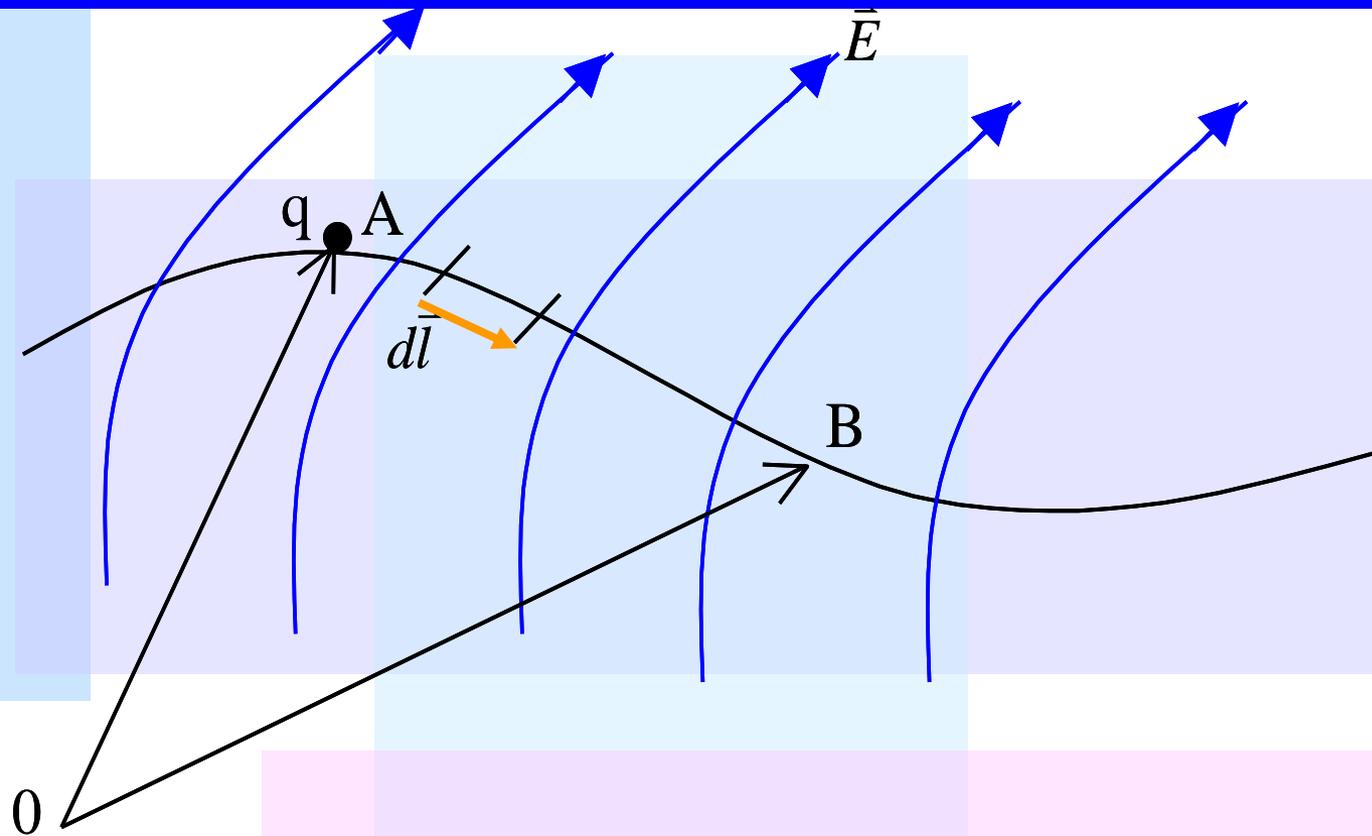
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 8 \iint_{S_8} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$Q = \iint_{\Lambda} \sigma ds = \pi(b^2 - a^2)\sigma_0 \left. \vphantom{Q} \right\} \iint_{S_8} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\pi(b^2 - a^2)\sigma_0}{8\epsilon_0}$$



Trabajo de un Campo Eléctrico

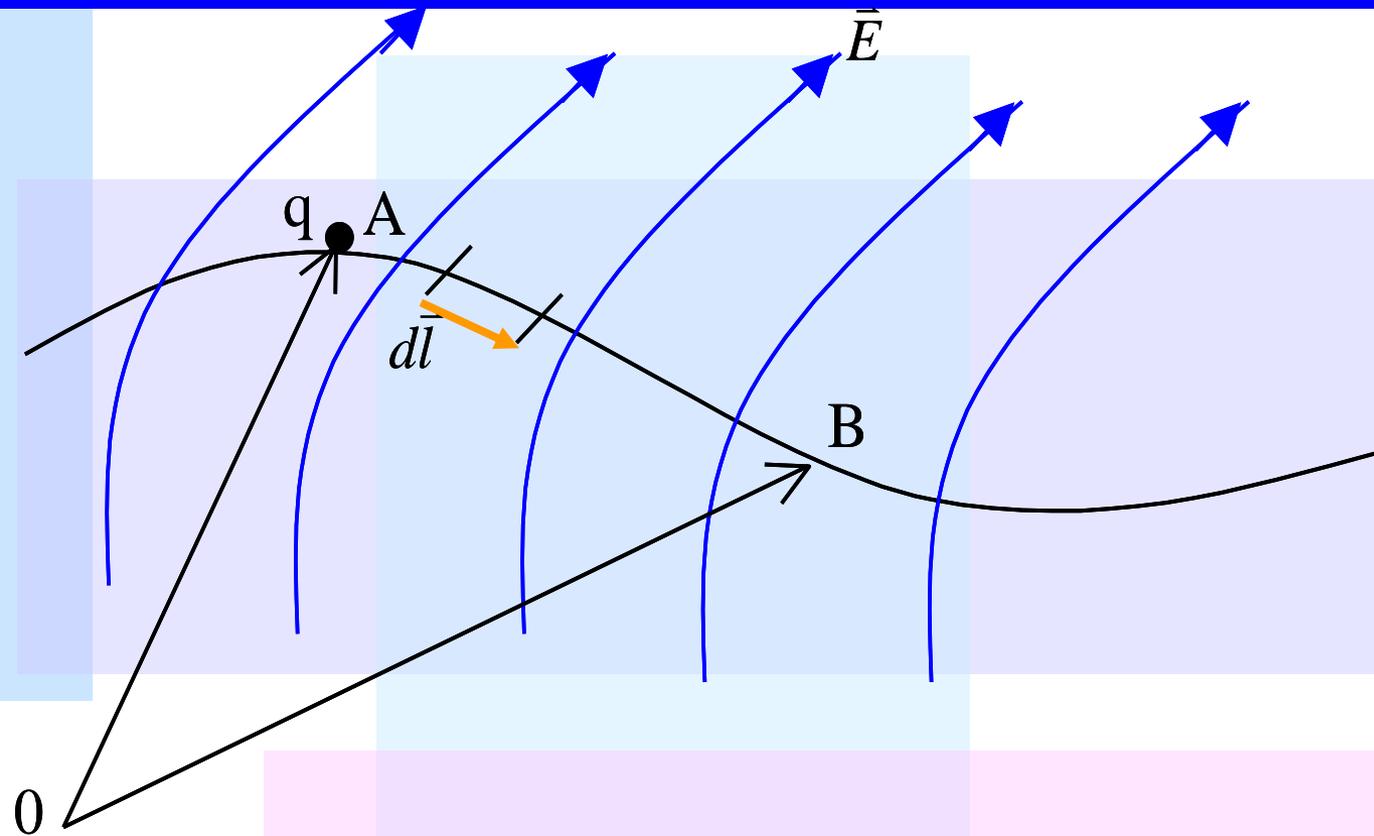


Si $W > 0$ Trabajo lo realiza agente externo

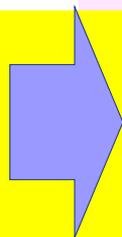
Si $W < 0$ Trabajo lo realiza campo



Trabajo de un Campo Eléctrico



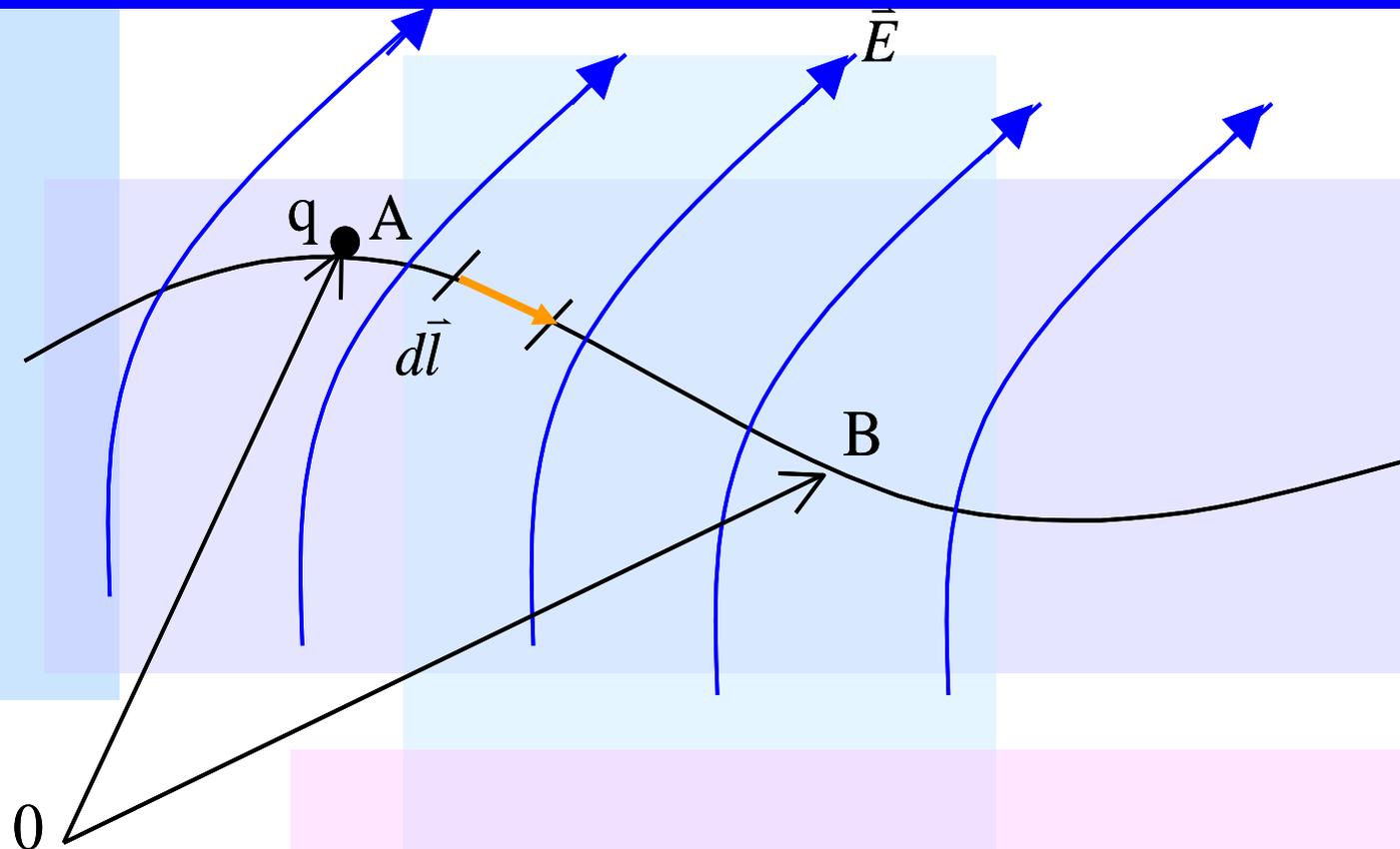
$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$



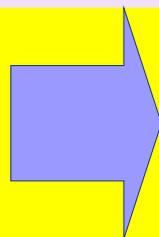
Si $W > 0$ Trabajo lo realiza agente externo
Si $W < 0$ Trabajo lo realiza campo



Trabajo de un Campo Eléctrico



$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l}$$

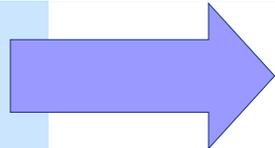


$$W = \int_A^B dW = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



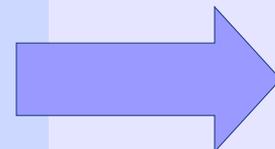
Definición de potencial

Si $W > 0$

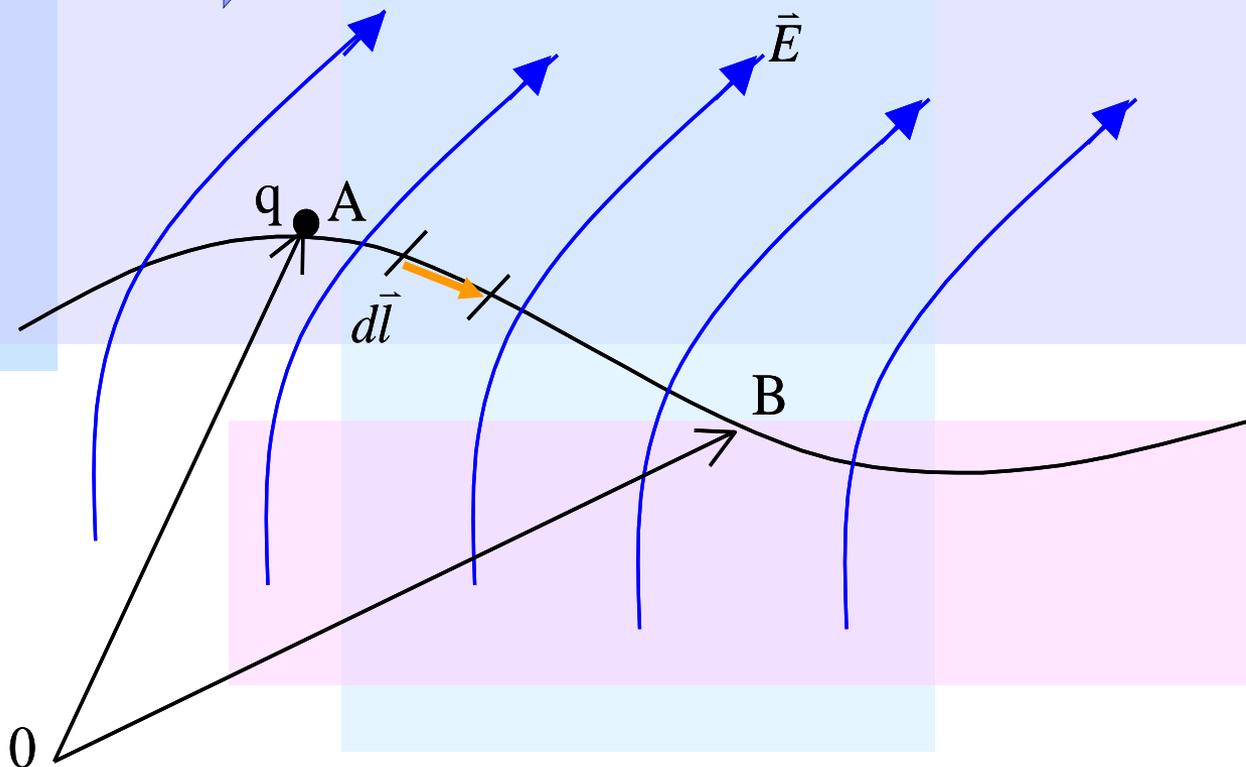


Trabajo lo realiza agente externo

Si $W < 0$

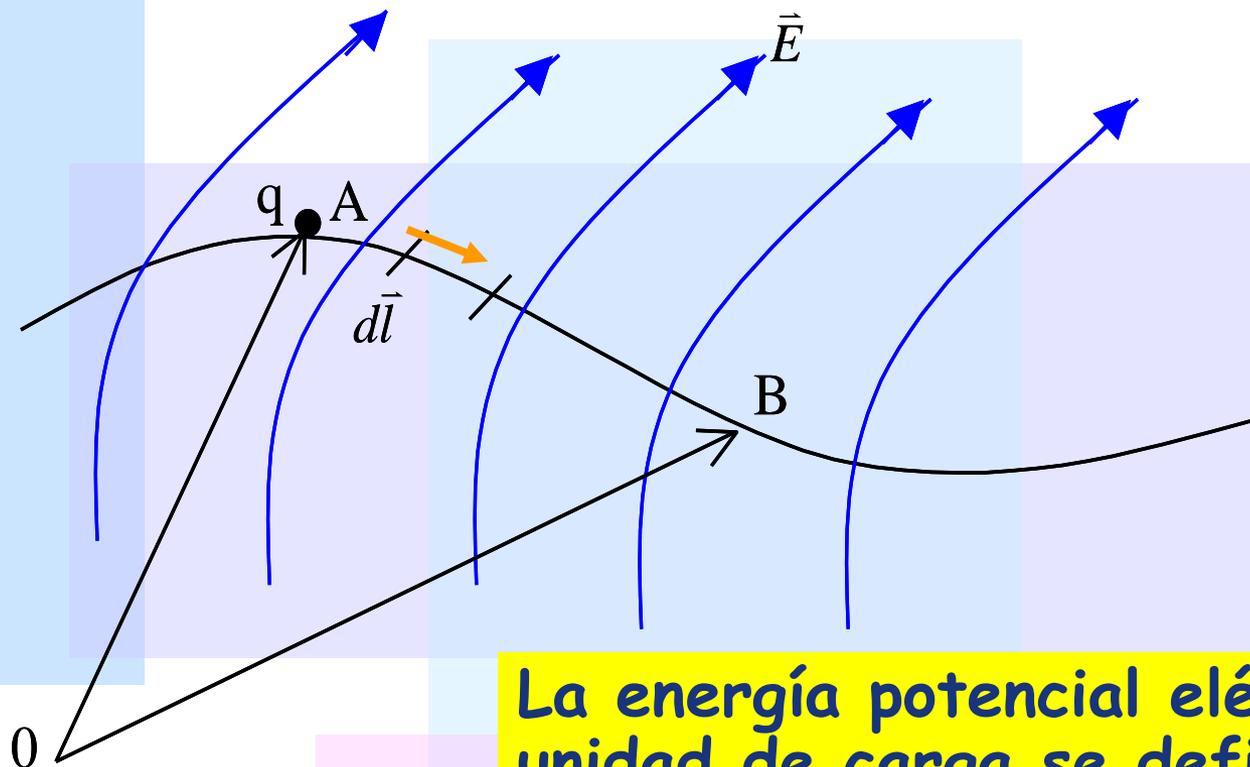


Trabajo lo realiza campo eléctrico





Definición de potencial



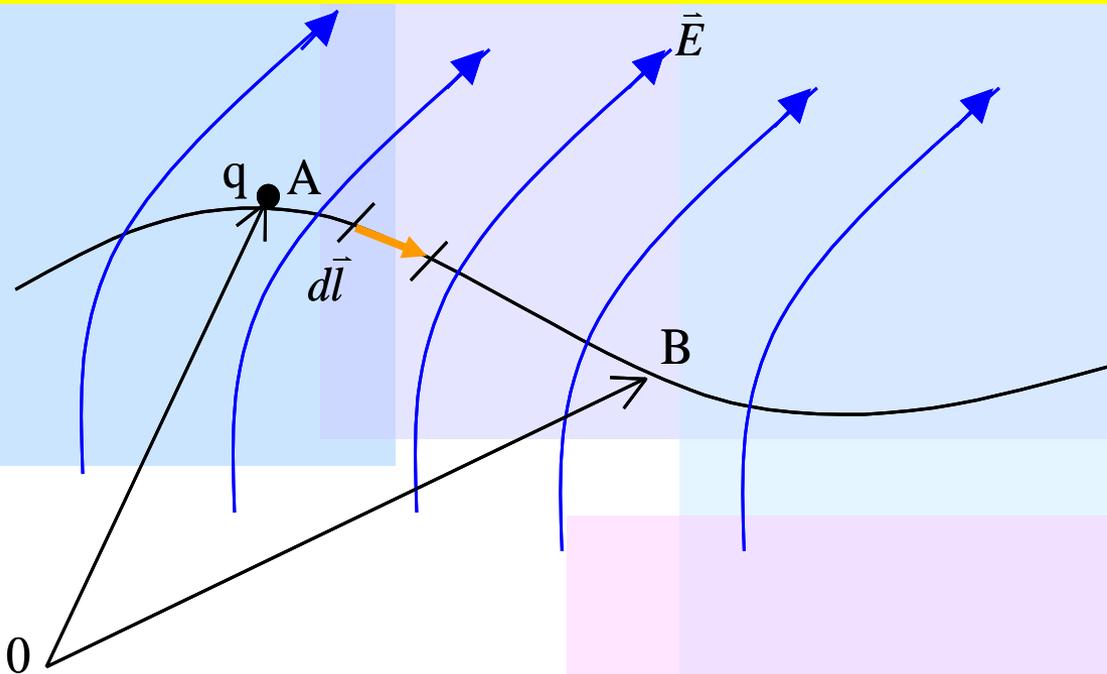
La energía potencial eléctrica por unidad de carga se define como diferencia de potencial eléctrico

$$dV = \frac{dW}{q} = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Definición de potencial

Se define la diferencia de potencial entre los puntos B y A, denominada V_{BA} , como el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga.



$$\int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\therefore V_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

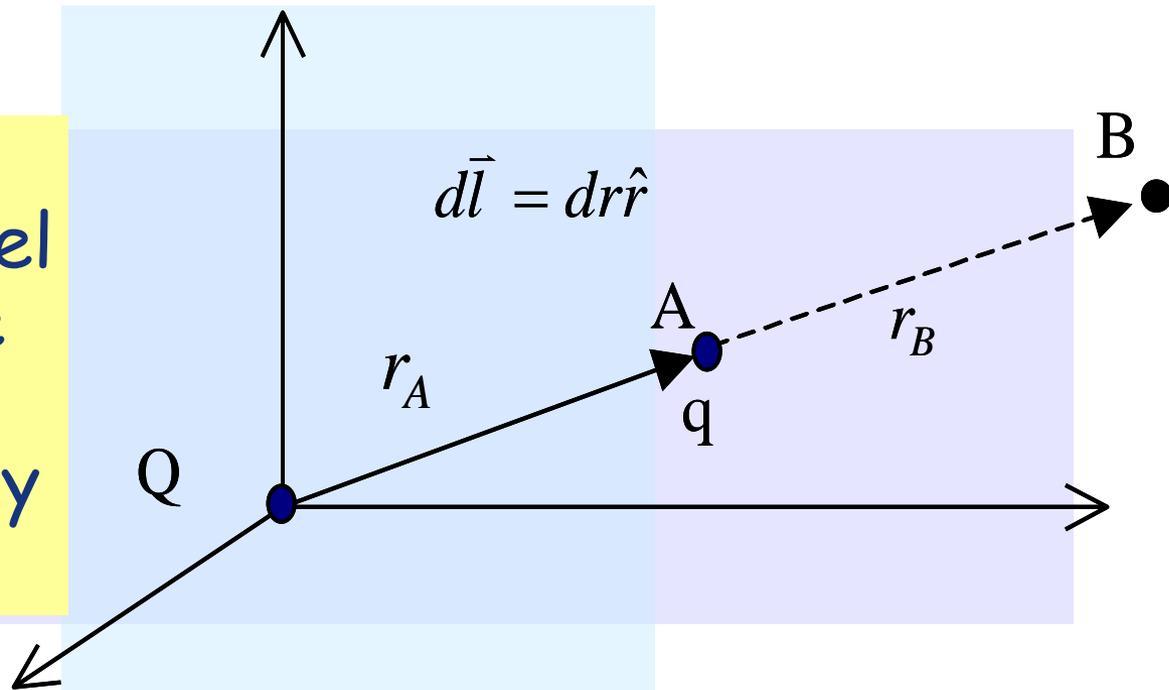
Unidades de [J/C], lo cual se denomina Volt [V]. Por ello es común expresar el campo eléctrico en [V/m]



Definición de potencial

Ejemplo 10.

Calcular campo E producido por Q , el trabajo para ir de A a B , y el potencial entre B y A .



Solⁿ

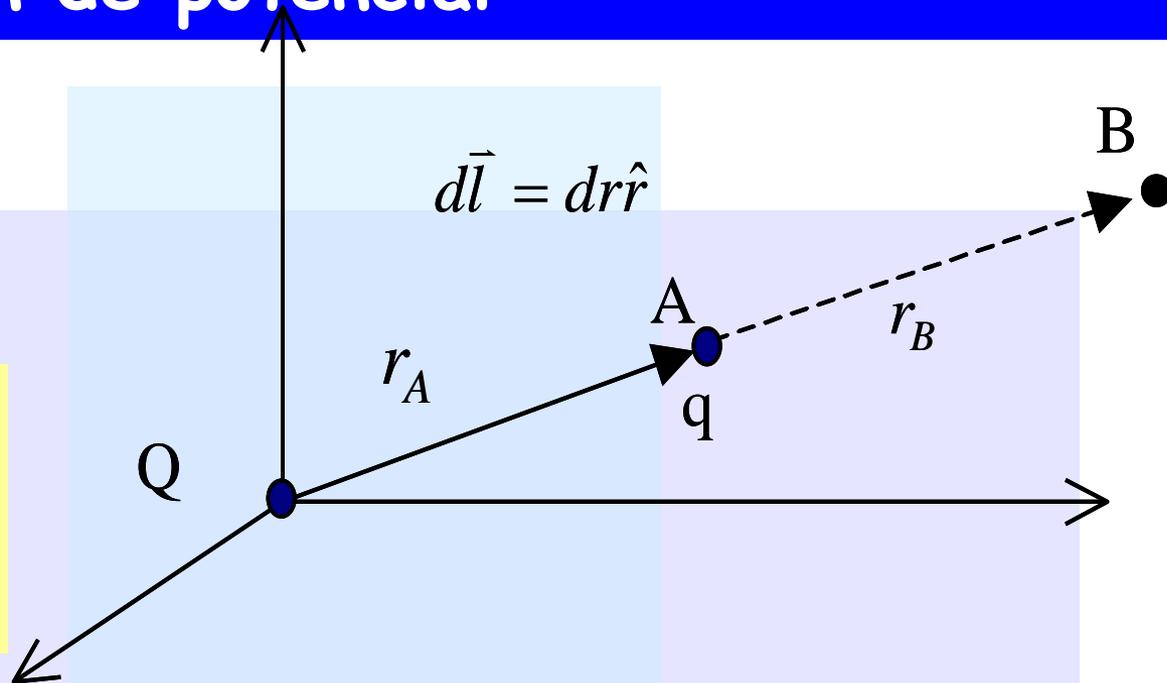
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$



Definición de potencial

Ejemplo 10.

$$W = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$W = -q \int_{r_A}^{r_B} \frac{Qdr}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2}$$

$$W = -q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Dado que $r_A < r_B$:

- Si q y Q del mismo signo $\rightarrow W$ negativo
- Otro caso W positivo

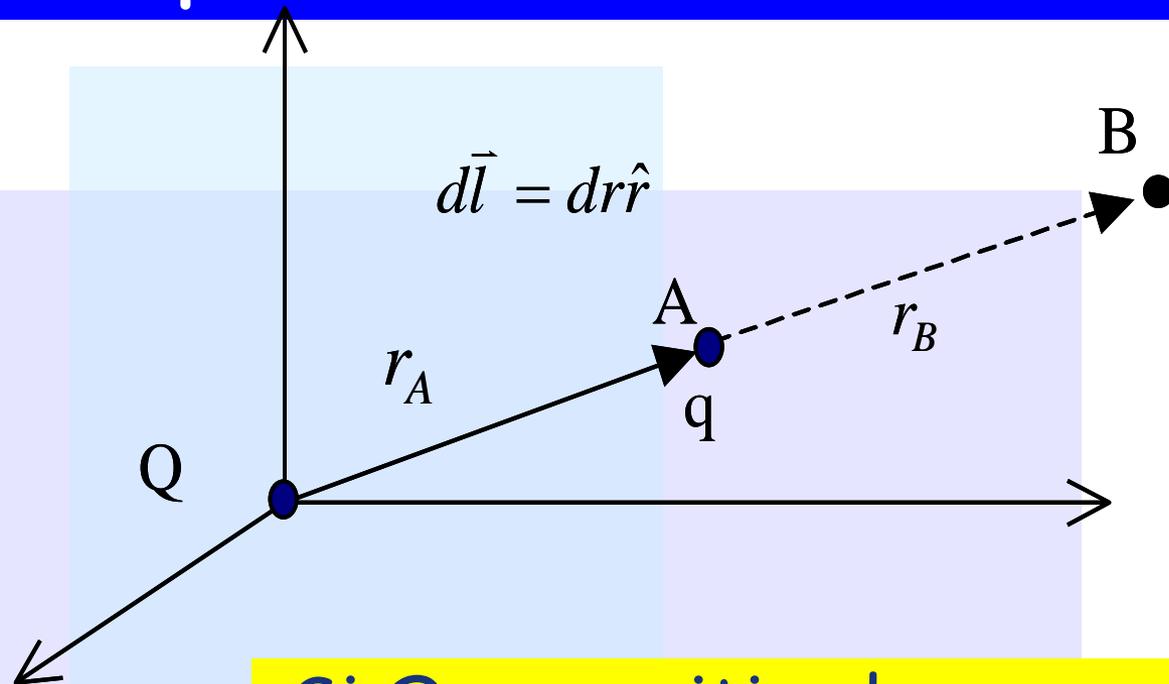


Definición de potencial

Ejemplo 10.

$$W = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$W = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$



- Si Q es positiva la diferencia de potencial entre B y A es negativa
- Campo va desde mayor potencial a menor potencial

$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

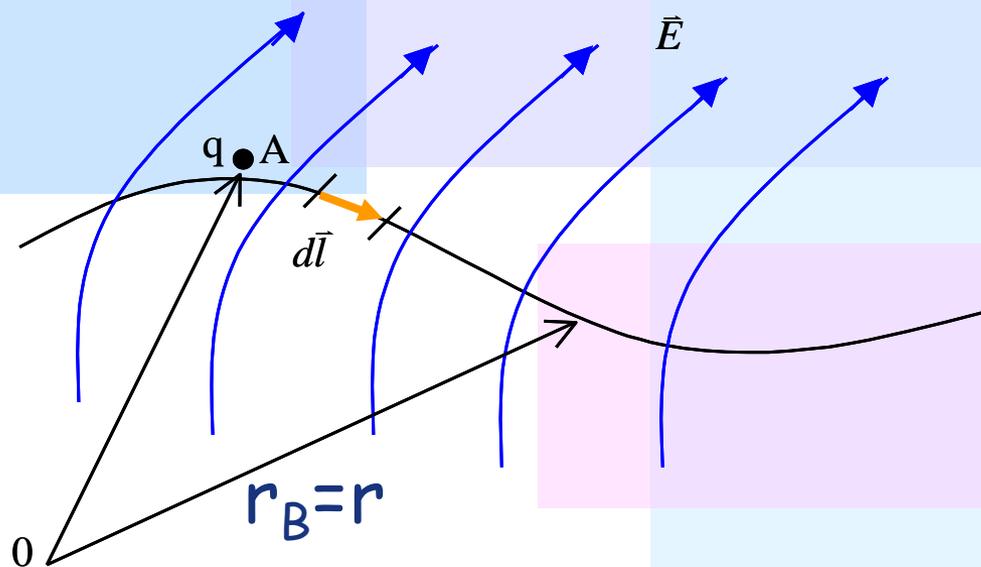


Definición de Potencial

Notar que la expresión para la diferencia de potencial V_{BA} no depende de q

$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Si hacemos $r_B=r$ variable, podemos definir una función potencial en todo el espacio.



$$V(\vec{r}) - V_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Trabajo por unidad de carga para ir desde r_A a r



Definición de potencial

Haciendo tender $r_A \rightarrow \infty$ y definiendo $V(\infty)=0$, se tiene

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A} \right] \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}\|}$$

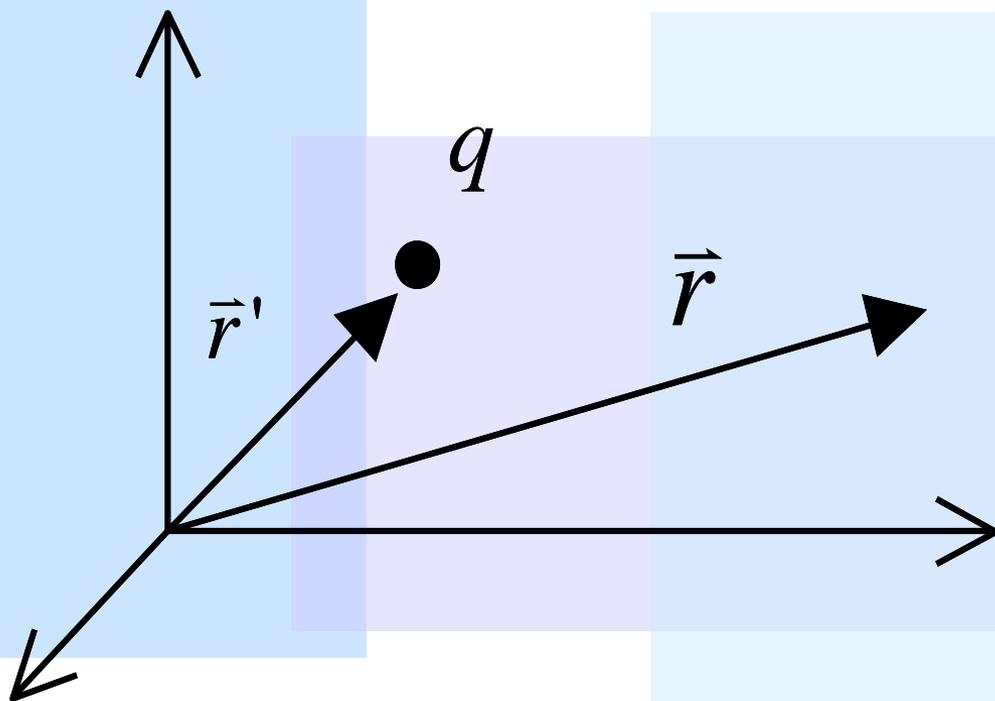
Trabajo por unidad de carga para venir desde el infinito a r

Función potencial eléctrico es un campo escalar

Función potencial eléctrico requiere de una referencia para su definición $V(r=r_A) = 0$



Definición de potencial



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

En un sistema de referencia cualquiera
 V es una función lineal con la carga, luego
cumple con superposición



Definición de potencial

Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_1\|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_2\|} + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_n\|}$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_k\|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$



Relaciones entre campo eléctrico y potencial

$$V_{BA} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Tomando A como referencia y haciendo B variable

$$V(\vec{r}) = - \int_{ref}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

Luego

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$