Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 21
Inducción Electromagnética II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

OTRO POEMA DE LOS DONES (J.L. Borges)

Gracias quiero dar al divino Laberinto de los efectos y de las causas

Por la diversidad de las criaturas que forman este singular universo,

Por la razón, que no cesará de soñar con un plano del laberinto,

Por el rostro de Elena y la perseverancia de Ulises,

Por el amor, que nos deja ver a los otros como los ve la divinidad,

Por el firme diamante y el agua suelta,

Por el álgebra, palacio de precisos cristales,
Por el fulgor del fuego,
Que ningún ser humano puede mirar sin un asombro antiguo,
Por la caoba, el cedro y el sándalo,
Por el pan y la sal,
Por el misterio de la rosa, que prodiga color y que no lo ve,

Por los ríos secretos e inmemoriales que convergen en mí, ….

Por el idioma que, hace siglos, hablé en Nortumbria,

Por la espada y el arpa de los sajones,

Por el mar, que es un desierto resplandeciente

y una cifra de cosas que no sabemos

Por la música verbal de Inglaterra,

Por la música verbal de Alemania,

Por el épico invierno,

Por el prisma de cristal y la pesa de bronce,

….

Por el lenguaje, que puede simular la sabiduría,

…..

Por la mañana, que nos depara la ilusión de un principio,

Por la noche, su tiniebla y su astronomía,

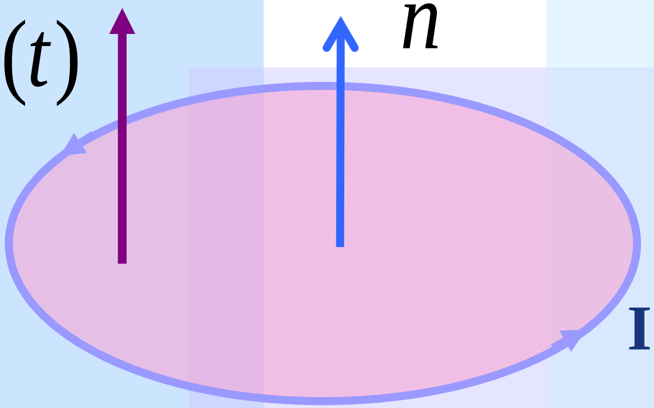
…..

Por la música, misteriosa forma del tiempo.

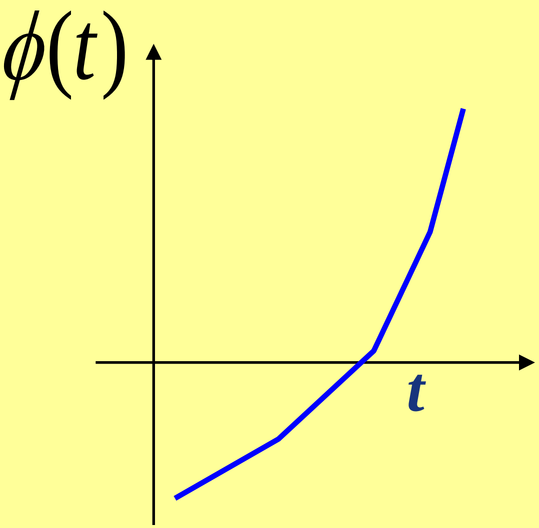
INDICE

Ley de Faraday-Lenz

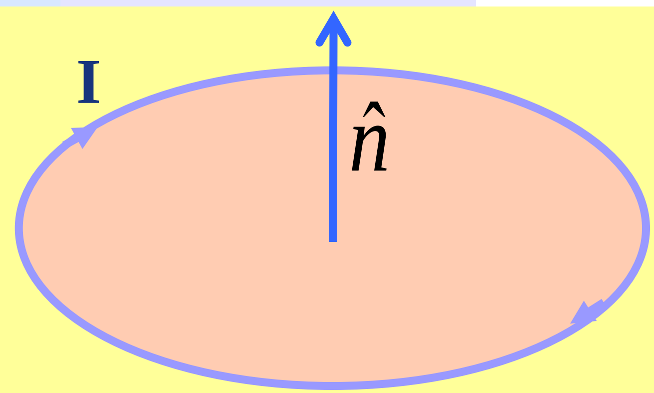
Un campo magnético variable genera o induce una FEM



$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}}$$ con $$\phi(t) = \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s}$$



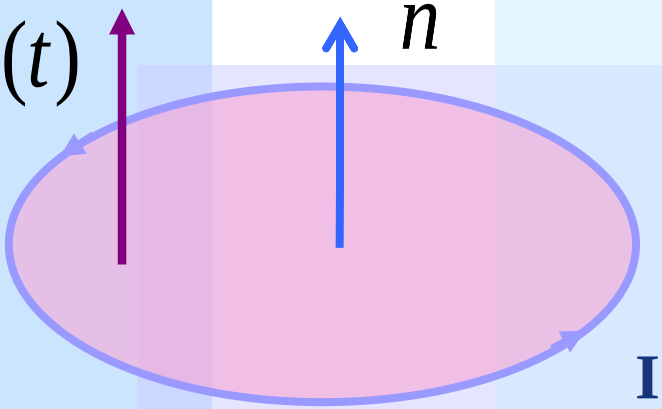
$$\dot{\phi} > 0 \Rightarrow \varepsilon < 0$$



$\phi(t)$ crece $\Rightarrow$ **Corriente genera campo opuesto al crecimiento**

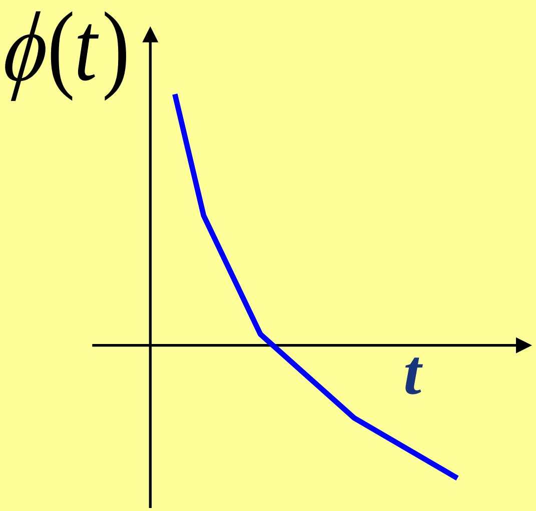
Ley de Faraday-Lenz

Un campo magnético variable genera o induce un FEM

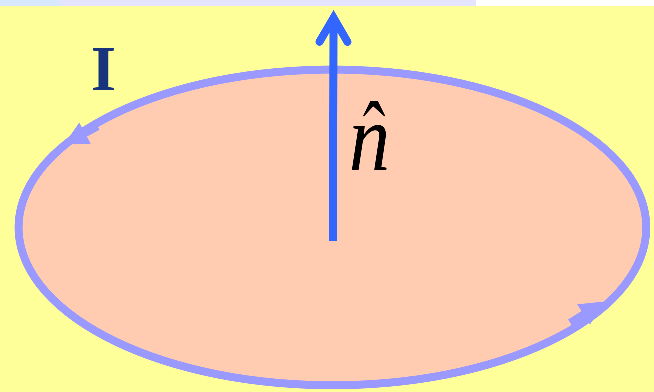


$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

con $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$



$$\dot{\phi} < 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$$



$\phi(t)$ **decrece** $\Rightarrow$ **Corriente genera campo opuesto al decrecimiento**

Modificación 3ª Ecuación de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

3ª Ecuación de Maxwell

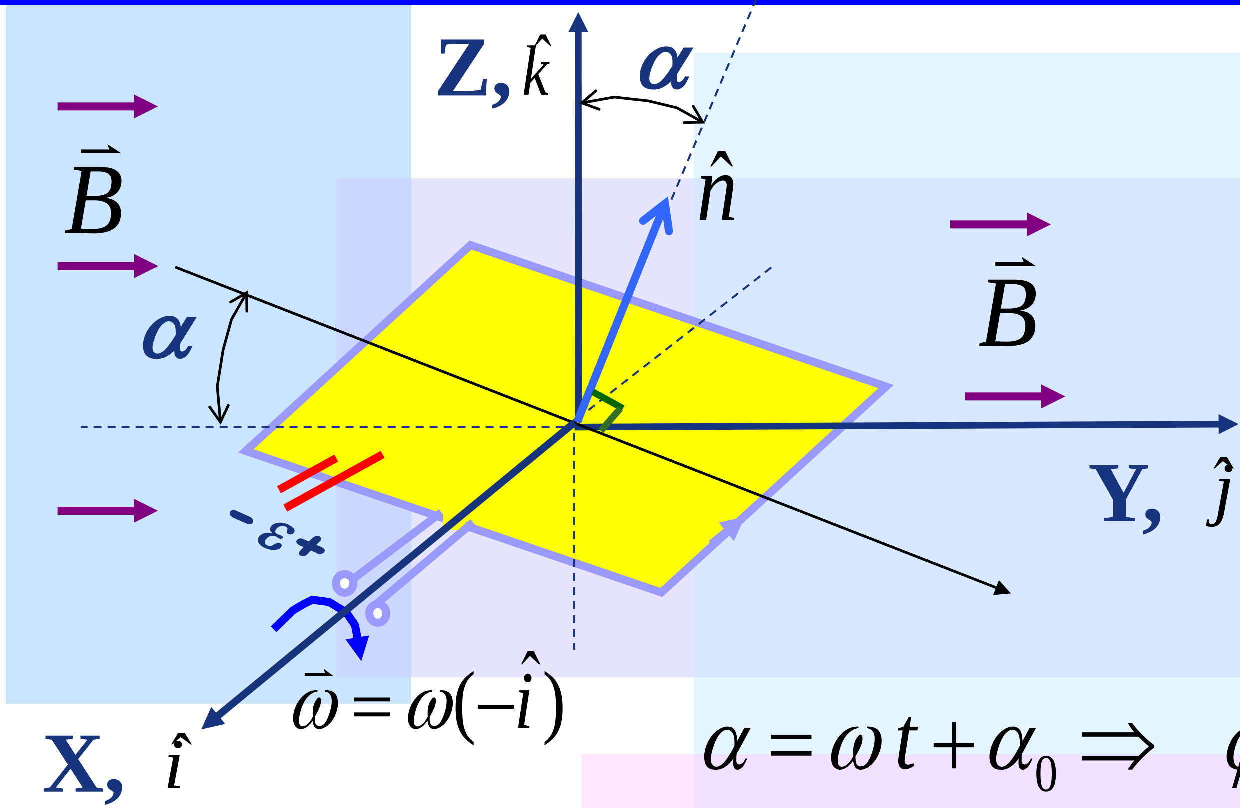
$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

usando $\nabla \times (\nabla V) = 0$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\boldsymbol{\vec{E} = \overbrace{-\nabla V}^{\textit{Origen electrostático}} - \underbrace{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\textit{Debido a campo magnético variable en el tiempo}}}$$

Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = BA\cos(90 - \alpha)$$

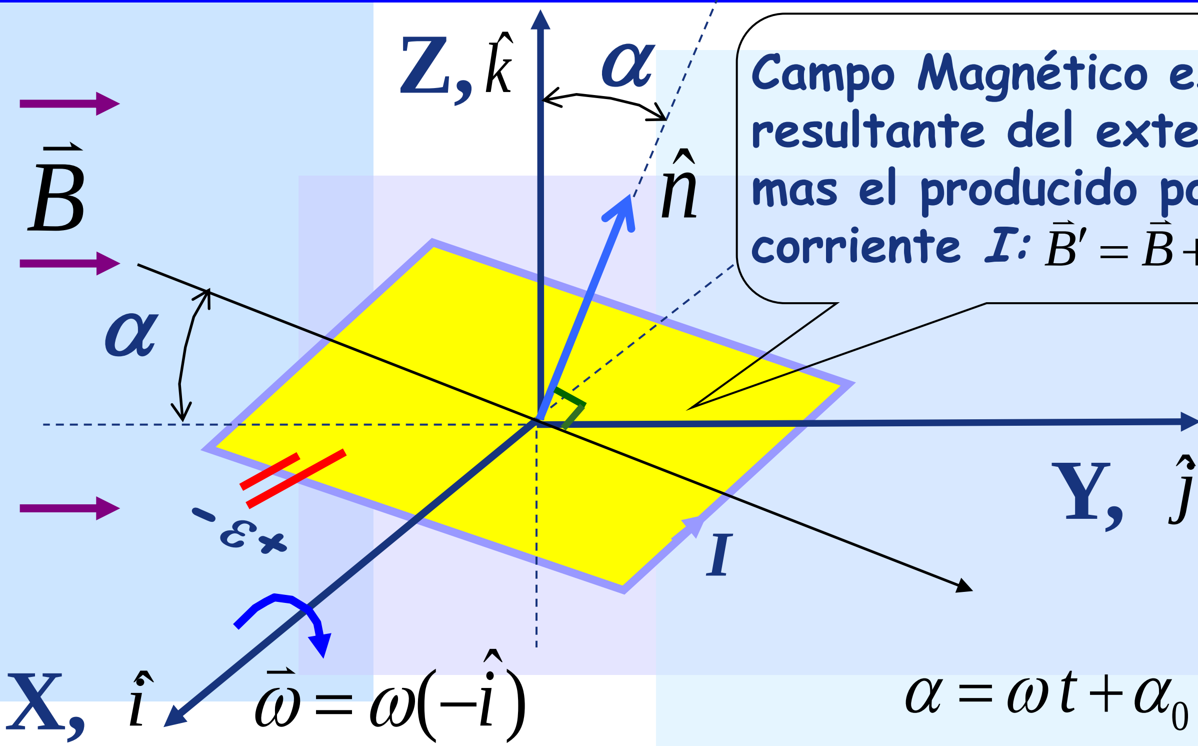
$$\phi = BA\sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \quad \phi = BA\sin(\omega t + \alpha_0)$$

Ley de Faraday-Lenz

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = BA\omega\cos(\omega t + \alpha_0)$$

Principio del generador



Campo Magnético es el resultante del externo mas el producido por la corriente *I*: $\vec{B}' = \vec{B} + \vec{B}_I$

$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B}' \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = B'A\cos(90-\alpha)$$

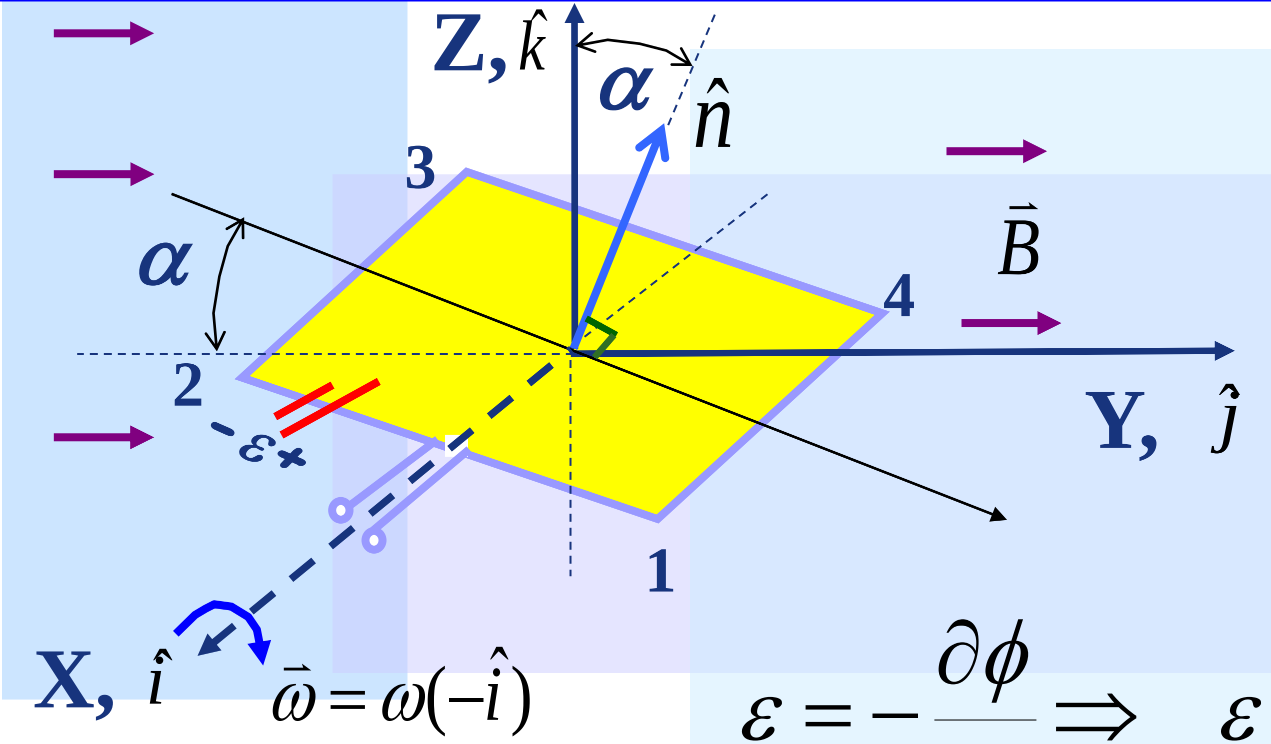
$$\phi = B'A\sin\alpha$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0 \Rightarrow \quad \phi = B'A\sin(\omega t + \alpha_0)$$

Ley de Faraday-Lenz $\varepsilon = -\dfrac{\partial\phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B'A\omega\cos(\omega t + \alpha_0)$

En la práctica $\left\|\vec{B}\right\| >> \left\|\vec{B}_I\right\|$

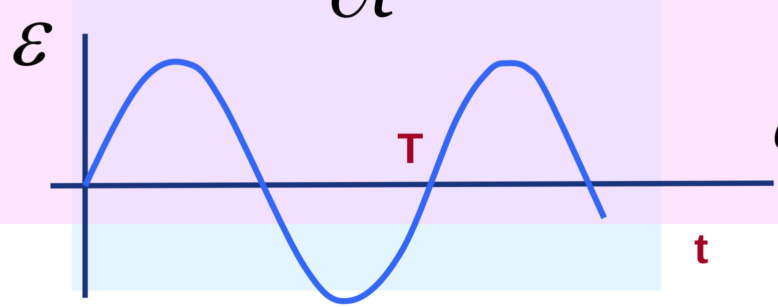
Principio del generador



$$\phi = \iint_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\phi = B \sin \alpha$$

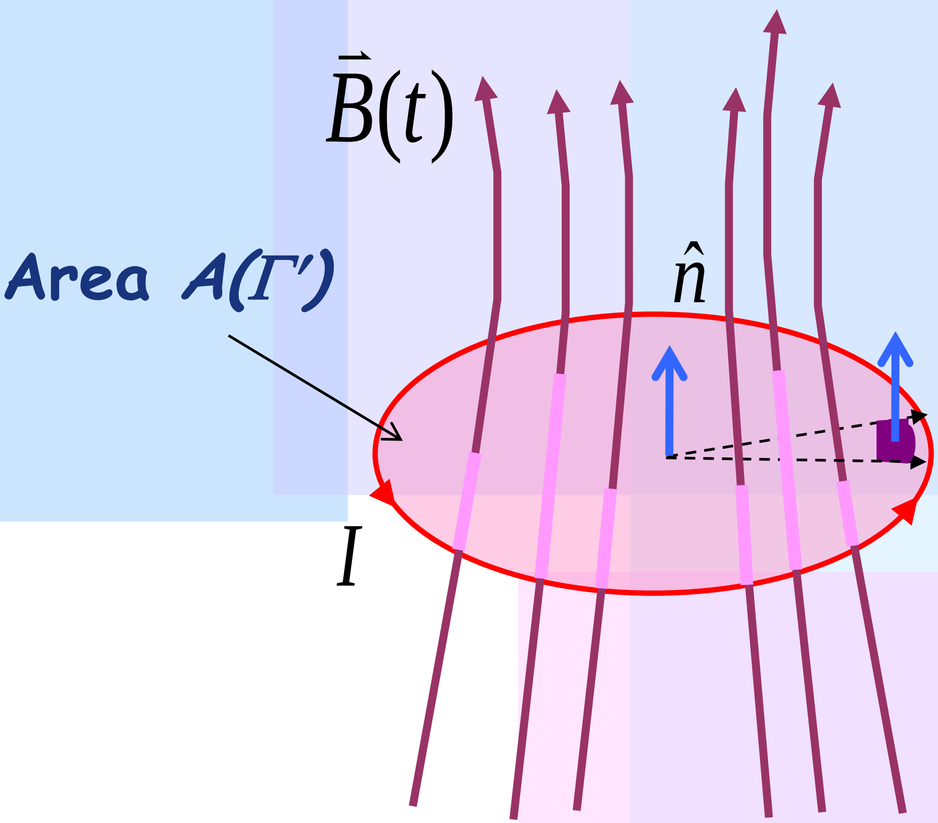
$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow \quad \varepsilon = B\omega \cos(\omega t + \alpha_0)$$



$$\omega = 2\pi f \Rightarrow T = \frac{1}{f}$$

Inductancia Propia

Campo producido SOLO por I

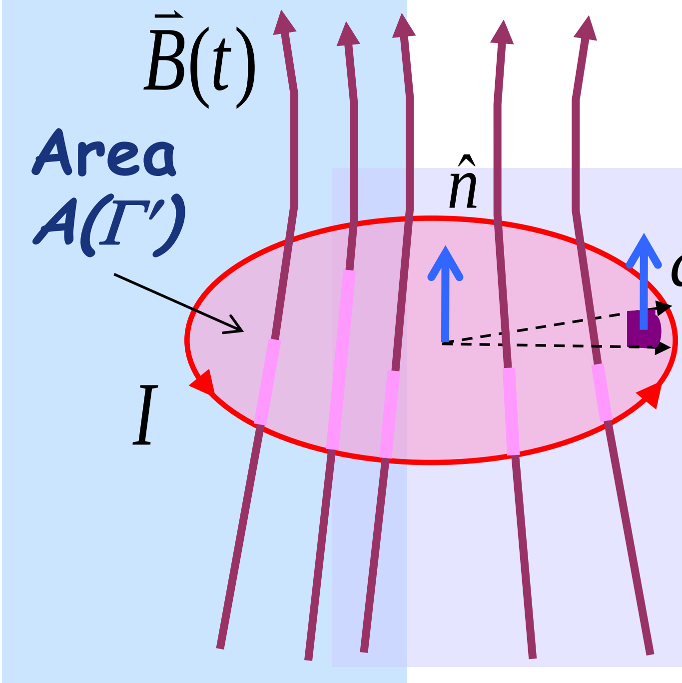


$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{n}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Inductancia Propia



$$d\vec{s} = ds \cdot \hat{n}$$

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

$$\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

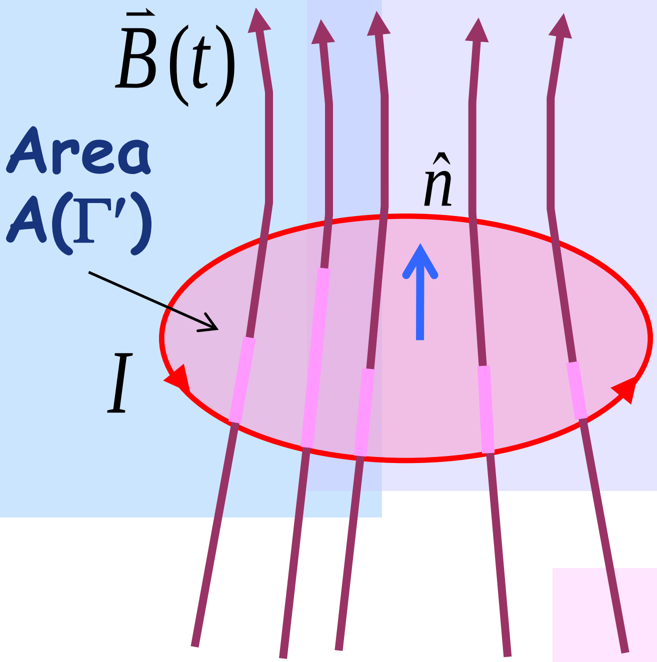
$$\phi = \iint_A \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

Inductancia propia del circuito

$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

Inductancia Propia

Campo producido SOLO por I



Inductancia propia del circuito

$$L \equiv \frac{\phi}{I} = \iint_A \left(\oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 d\vec{l}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3} \right) \bullet d\vec{s}$$

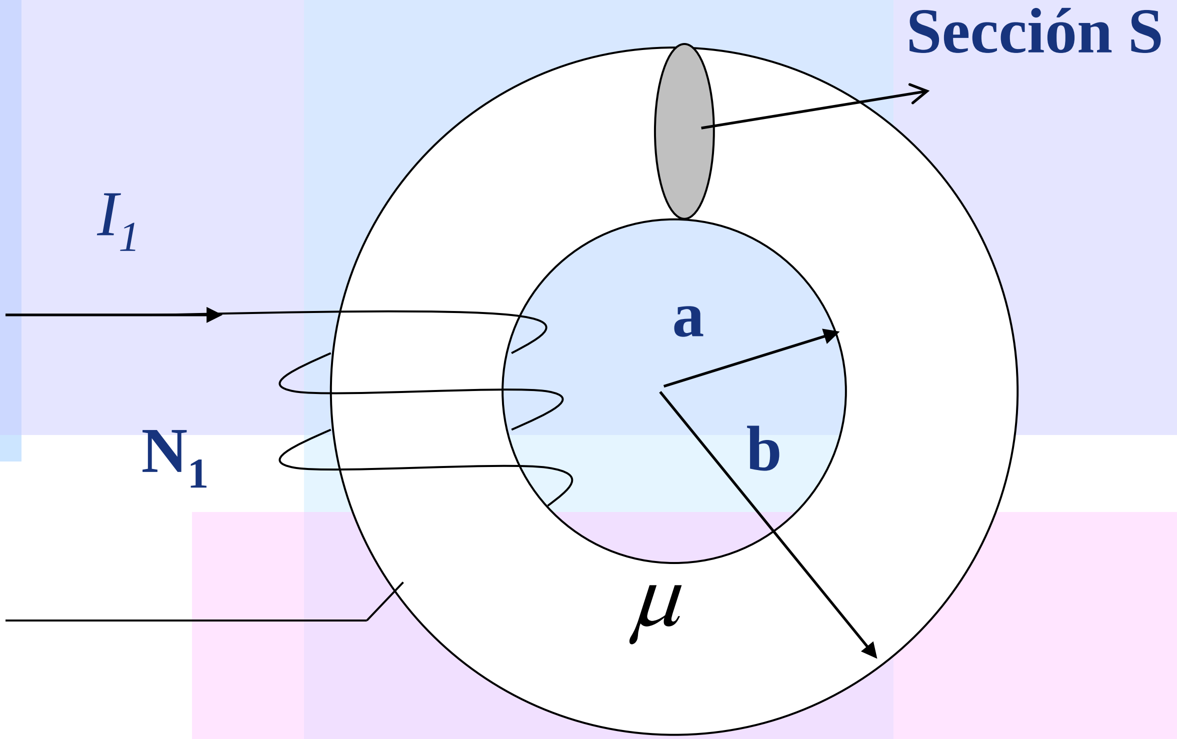
NO depende de la corriente ni del flujo,

Depende de la geometría

[L]=Henry [H]

Inductancia propia

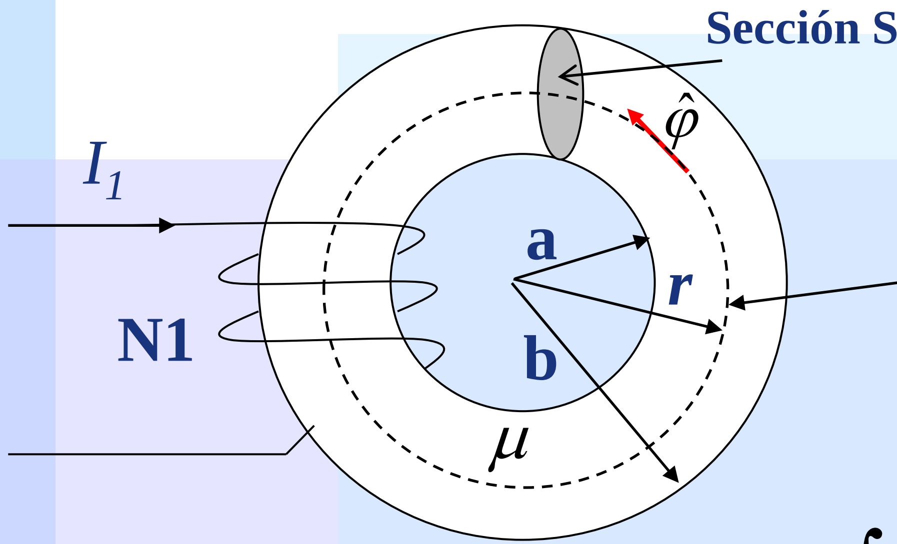
Ejemplo 1. Calcular la inductancia propia de la bobina de N_1 vueltas montada en el toroide de la figura



Hint. Suponga campo magnético constante

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Inductancia Propia



$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Calculamos el campo magnético

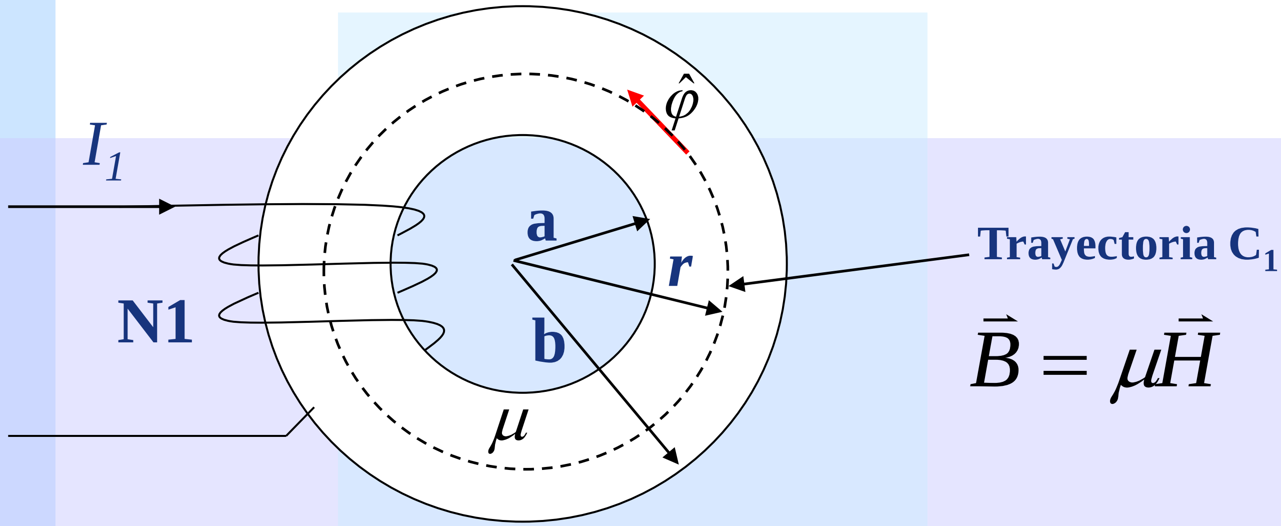
$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Vemos que $\vec{H} = H\hat{\varphi}$ ⇒

$$\oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{0}^{2\pi} H(r)\hat{\varphi} \cdot r d\varphi \, \hat{\varphi}$$

$$\oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H(r)$$

Inductancia Propia



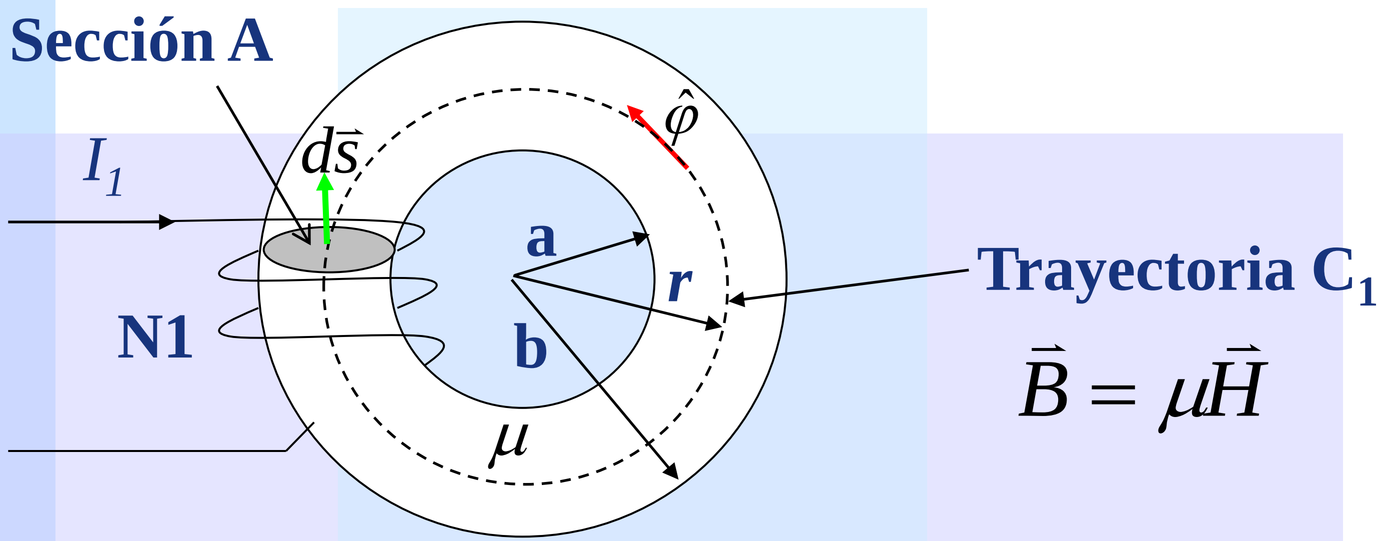
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Corriente total enlazada $I_{enlazada} = -N_1 I_1$

$$\Rightarrow rH(r)2\pi = -N_1 I_1 \Rightarrow \vec{H}(r) = -\frac{N_1 I_1}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

En el punto medio $\vec{H} = -\dfrac{N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi} \Rightarrow \vec{B} = -\dfrac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi}$

Inductancia Propia



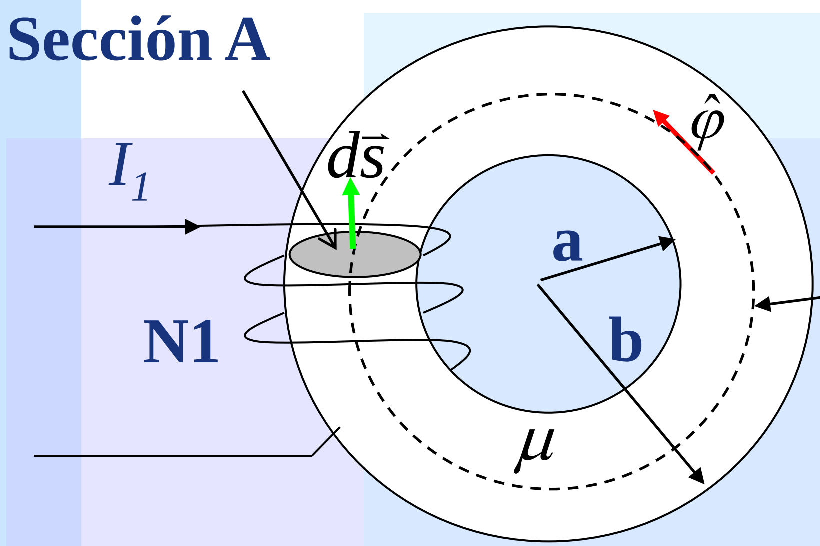
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por una vuelta $\phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{s}$

De la figura $d\vec{s} = ds(-\hat{\varphi})$

$$\Rightarrow \iint_A \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_A -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)} \hat{\varphi} \bullet ds(-\hat{\varphi})$$

Inductancia Propia



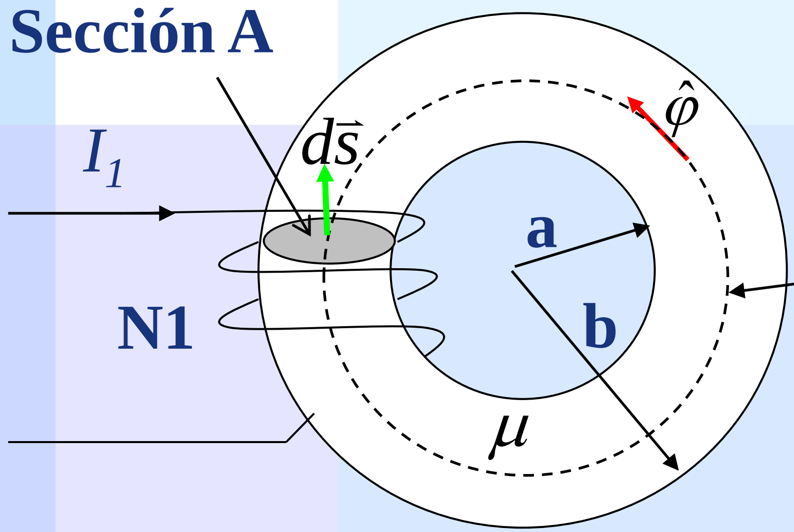
Trayectoria C_1

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por una vuelta
$$\phi = \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$$

Flujo enlazado por todo el circuito
$$\phi_T = N_1 \frac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$$

Inductancia Propia



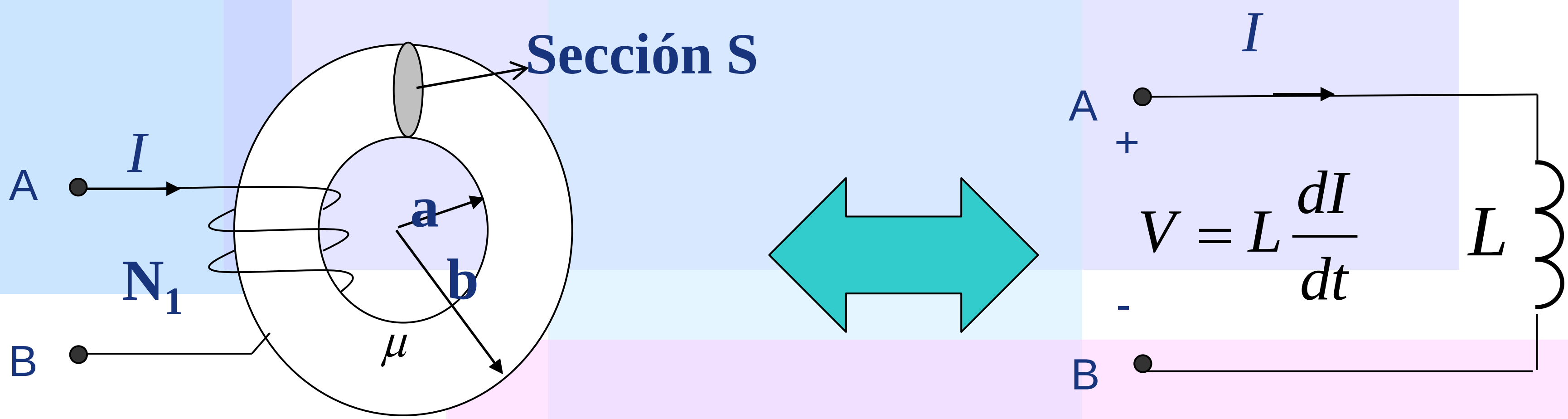
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Flujo enlazado por todo el circuito $\phi_T = N_1 \dfrac{\mu N_1 I_1 A}{\pi(a+b)}$

Inductancia propia del circuito $L \equiv \dfrac{\phi_T}{I_1} = \dfrac{\mu N_1^2 A}{\pi(a+b)}$

Inductancia propia

Se acostumbra a usar un símbolo universal para designar las inductancias

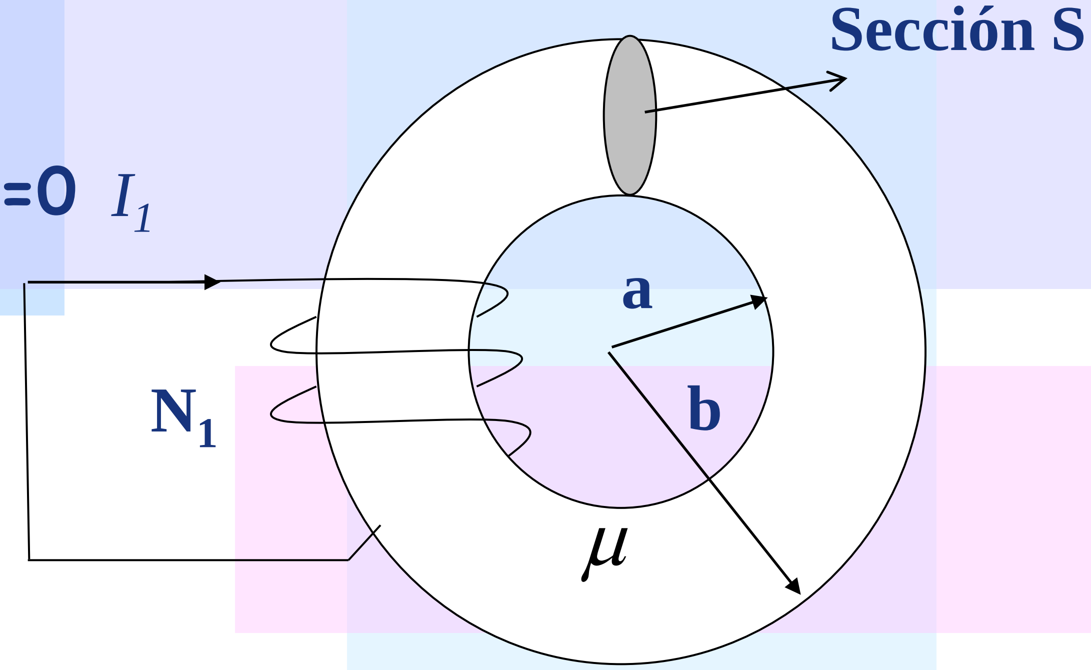


$$L = \frac{\mu N_1^2 A}{\pi(a+b)}$$

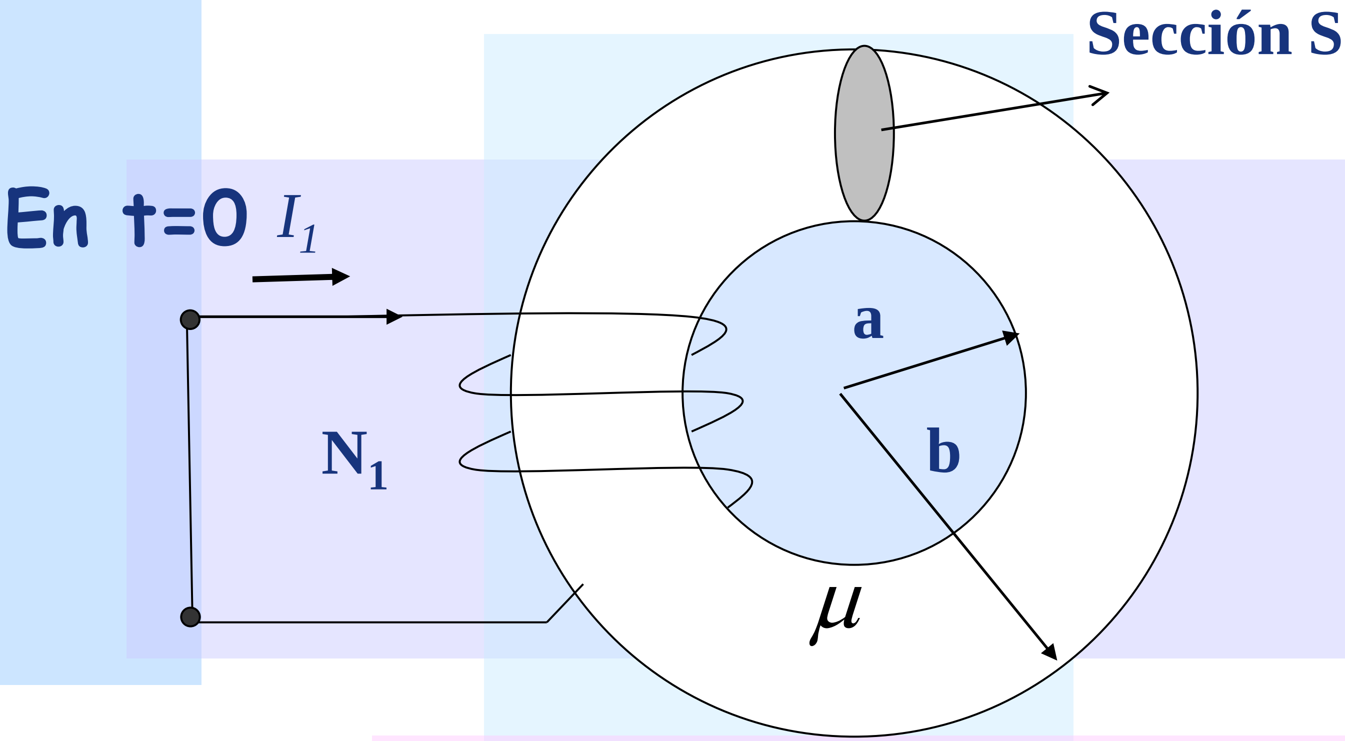
Inductancia propia

Suponga ahora que cuando circulaba una corriente I_1 se cortocircuita el conductor. Se pide calcular la corriente en función del tiempo si la resistencia del conductor es R.

En t=0 I_1



Inductancia propia

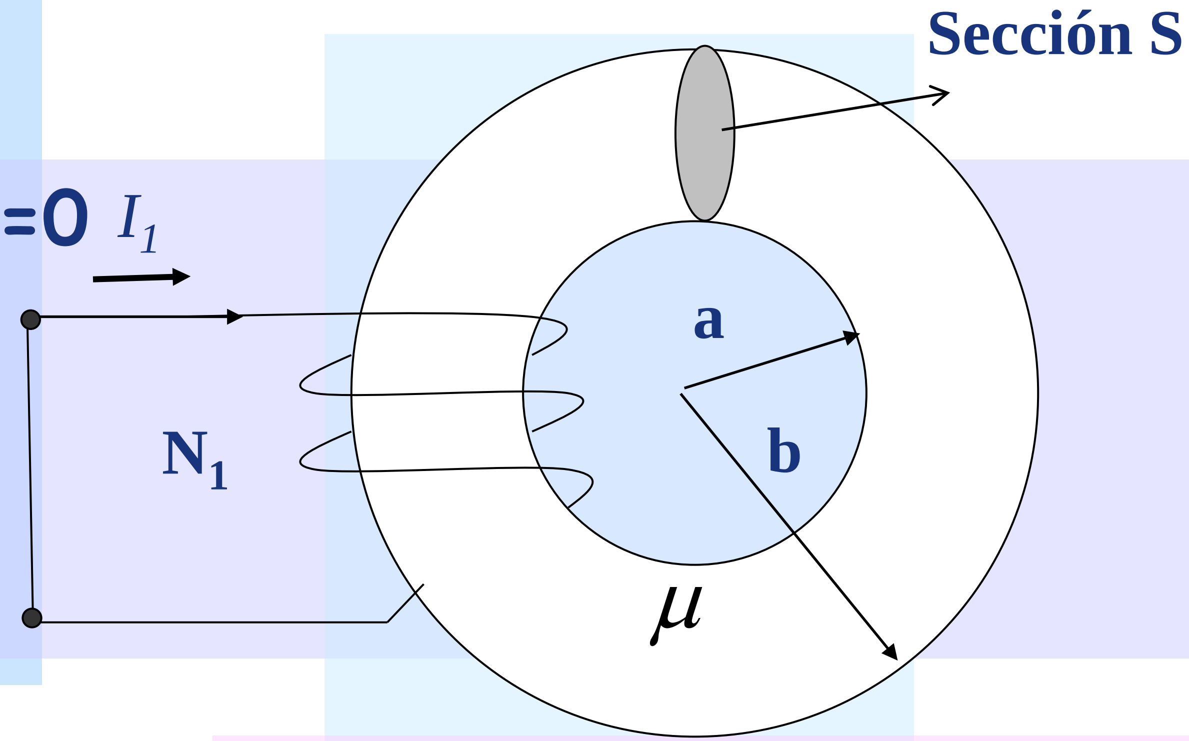


Se cumple $\phi = LI_1$ donde $L = \dfrac{\mu N_1^2 A}{\pi(a+b)}$

La fem inducida en es $\varepsilon = -\dfrac{\partial \phi}{\partial t}$

Inductancia propia

En t=0

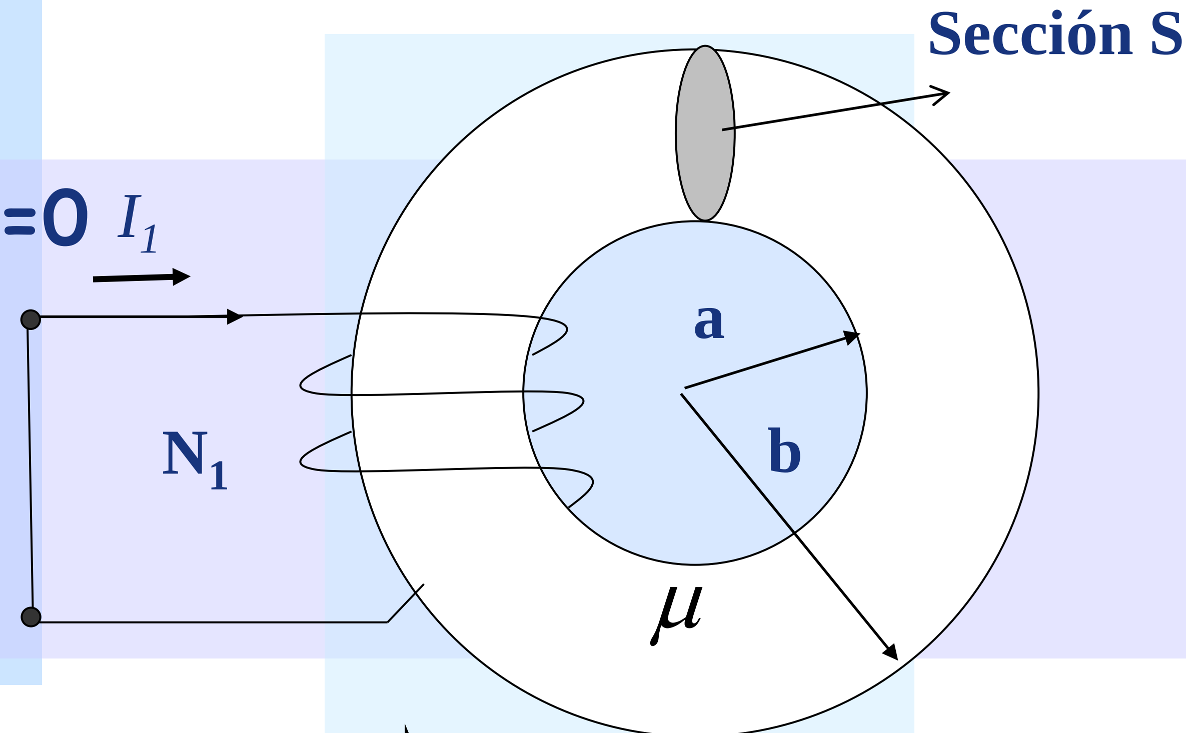


La fem inducida cumple con $\varepsilon = -L\dfrac{\partial I}{\partial t}$

Por otra parte la resistencia impone que $\varepsilon = RI$

Inductancia propia

En t=0 I_1



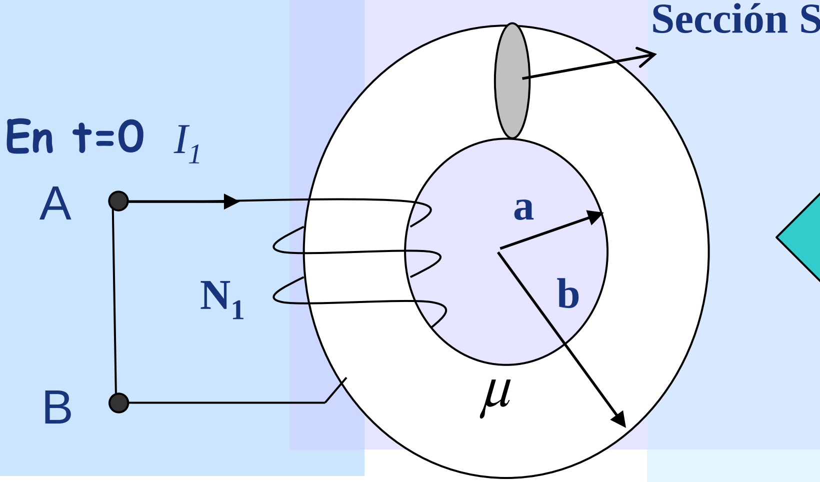
$$-L\frac{\partial I}{\partial t} = RI \;\Rightarrow\; \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{R}{L}I = 0 \;\Rightarrow\; I(t) = Ae^{-t/\tau}, \quad \tau = L/R$$

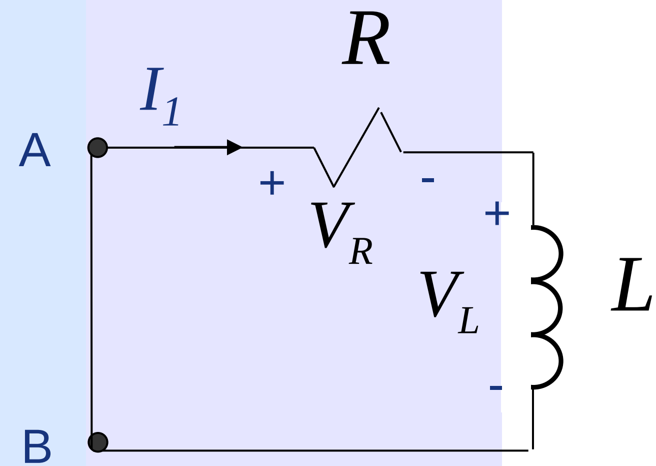
En t=0 $\quad I(t=0) = I_1$

$$\therefore I(t) = I_1 e^{-t/\tau}$$

Ejemplo con circuito

Se puede trabajar directamente con el circuito equivalente





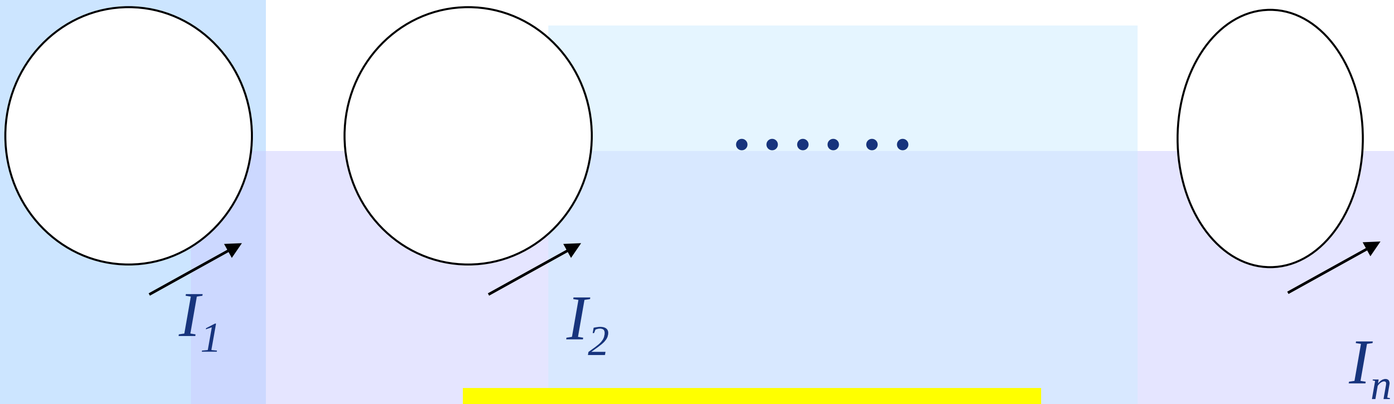
LVK

$$V_R + V_L = 0$$

$$L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0$$

$$CI \Rightarrow I(t) = I_1 e^{-t/\tau}$$

Inductancia mutua



n circuitos

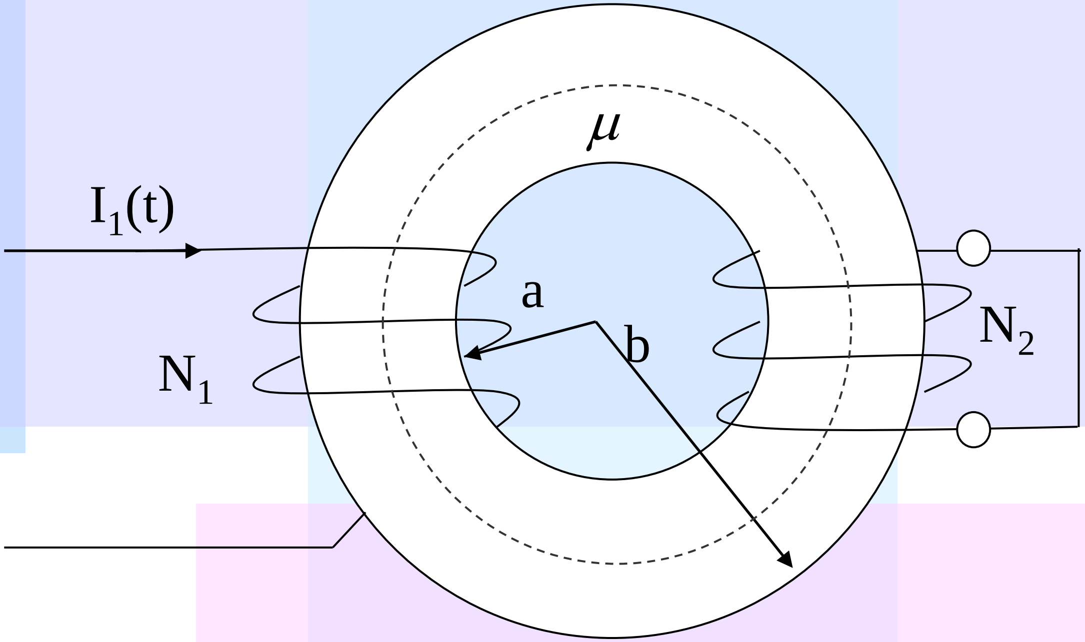
Sea ϕ_{jk} el flujo magnético que atraviesa el circuito j debido SOLO a la corriente que circula por el circuito k

Inductancia mutua entre el circuito j y k $\quad Ljk = \dfrac{\phi_{jk}}{I_k}$

Se cumple $L_{jk} = L_{kj}$ PROBARLO!

Inductancia mutua

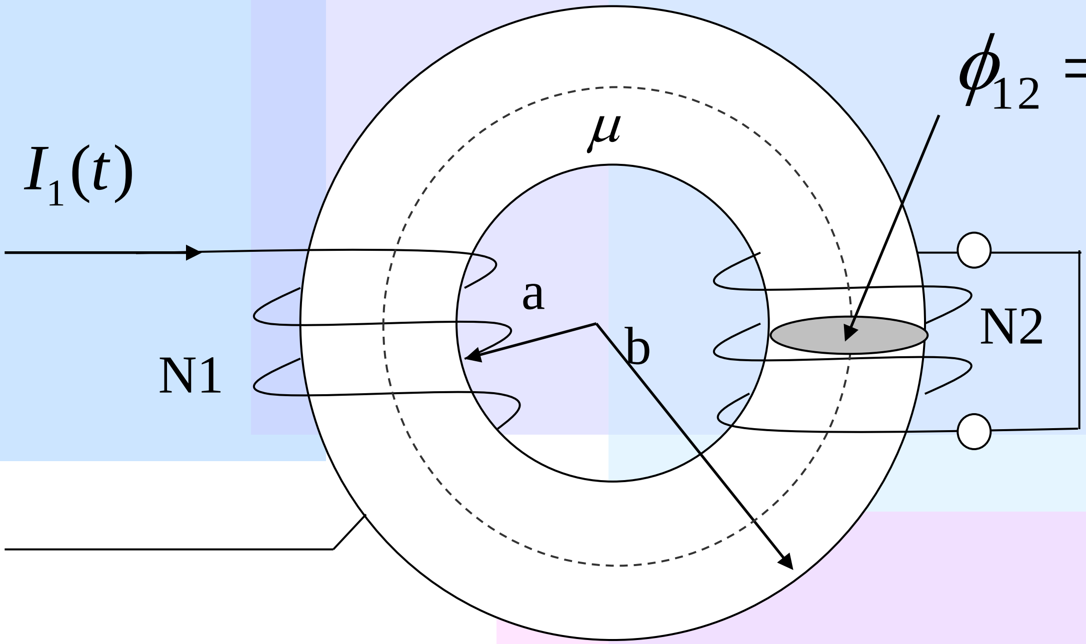
Ejemplo 2. Calcular la inductancia mutua entre los circuitos montados en el toroide de la figura



Inductancia mutua

Ejemplo 2. Calcular la inductancia mutua entre los circuitos montados en el toroide de la figura

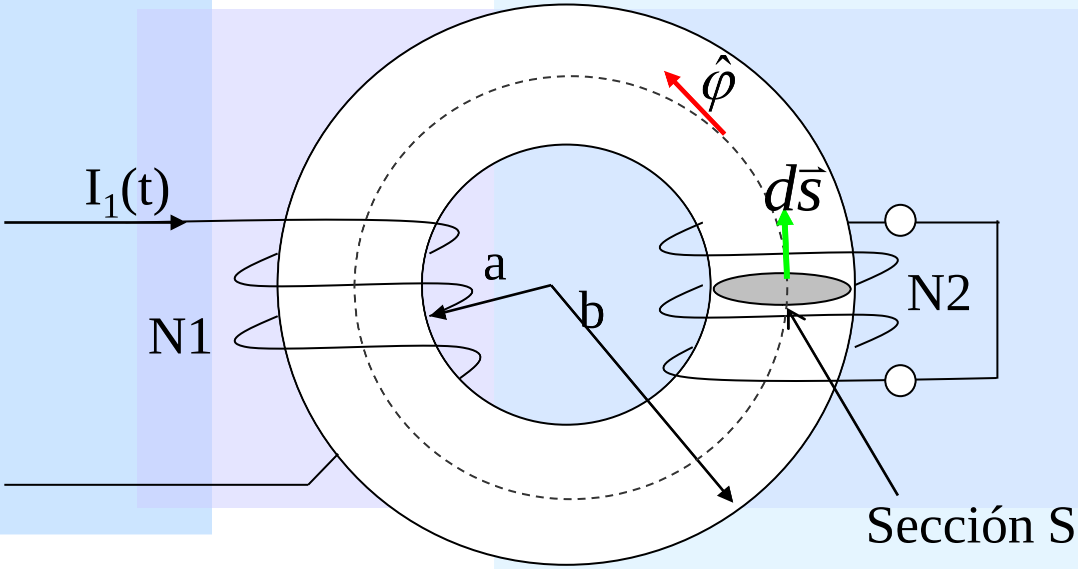
$$\phi_{12} = N_2 \times \underbrace{Flujo\ espira}_{\phi_e}$$



Inductancia mutua entre el circuito 1 y 2 $L_{12} \equiv \dfrac{\phi_{12}}{I_1}$

Inductancia mutua

Campo producido por I_1 es $\vec{B} = -\dfrac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi}$



Flujo en S es

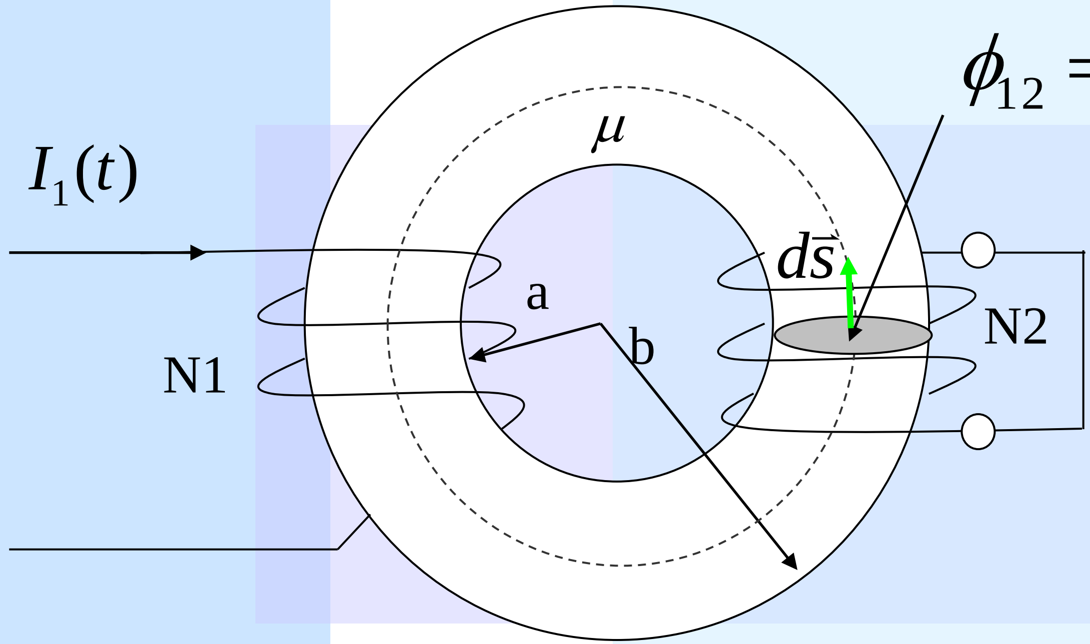
$$\phi_e = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

De la figura $d\vec{s} = ds\,\hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = \iint_S -\frac{\mu N_1 I_1}{\pi(a+b)}\hat{\varphi} \bullet ds\,\hat{\varphi}$$

$$\therefore \phi_e = -\frac{\mu N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$

Inductancia mutua



$$\phi_{12} = N_2 \times \underbrace{Flujo\ espira}_{\phi_e}$$

$$\phi_{12} = -\frac{\mu N_2 N_1 I_1 S}{\pi(a+b)}$$

Inductancia mutua entre el circuito 1 y 2 $\quad L_{12} \equiv \frac{\phi_{12}}{I_1}$

$$\therefore \quad L_{12} = -\frac{\mu N_2 N_1 S}{\pi(a+b)}$$