Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 12
Método de las Imagenes

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- **Condiciones de borde y unicidad Ec. Laplace**
- **Método de la carga imagen**
- **Resumen medios materiales en electrostática**

Lisboa Revisitada
Fernando Pessoa, 1923

No: no quiero nada.
Ya dije que no quiero nada.
¡No me vengáis con conclusiones!
La única conclusión es morir.
¡No me traigáis estéticas!
¡No me habléis de moral!
¡Quitadme de aquí la metafísica!
No me prediquéis sistemas completos, no me ensartéis conquistas de las ciencias (¡de las ciencias, Dios mío, de las ciencias!)
¡De las ciencias, de las artes, de la civilización moderna!
¿Qué mal les hice yo a los dioses todos?
Si tenéis la verdad, ¡guardadla!

Soy un técnico, pero tengo técnica sólo dentro de la técnica.
Fuera de eso soy loco, con todo el derecho de serlo.
Con todo el derecho de serlo, ¿oísteis?
¡No me molestéis, por el amor de Dios!
¿Me queríais casado, fútil, cotidiano y tributable?
Me queríais lo contrario de esto, lo contrario de cualquier cosa?
Si yo fuese otra persona, os daría, a todos, por el gusto.
Así, como soy, ¡tened paciencia!
¡Iros al diablo sin mí,
o dejadme ir solo al diablo!
¿Para qué habremos de ir juntos?
……………………..

CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Teníamos

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Tomando la divergencia

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Usando la 1ª ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Ecuación de Poisson

CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Si no hay cargas:

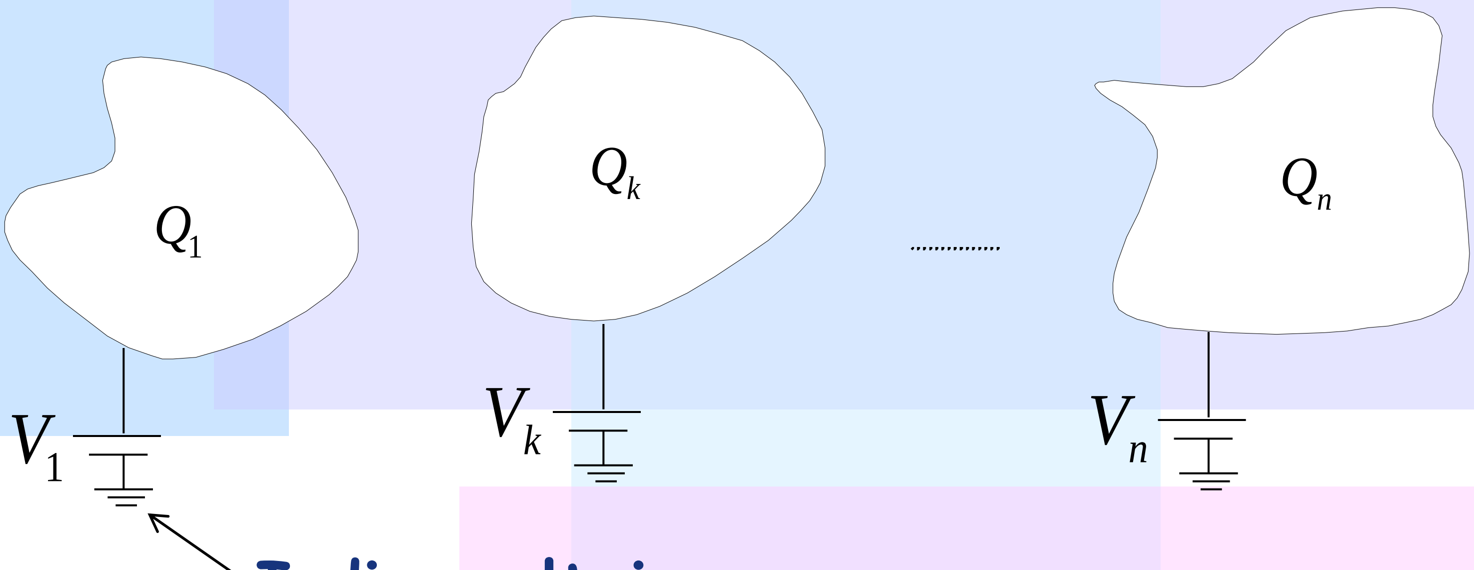
$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Ecuación de Laplace.

- Es la más usada en la práctica para determinar el campo eléctrico
- Para resolverla se requieren condiciones de borde

CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Consideremos un sistema con conductores en equilibrio electrostático

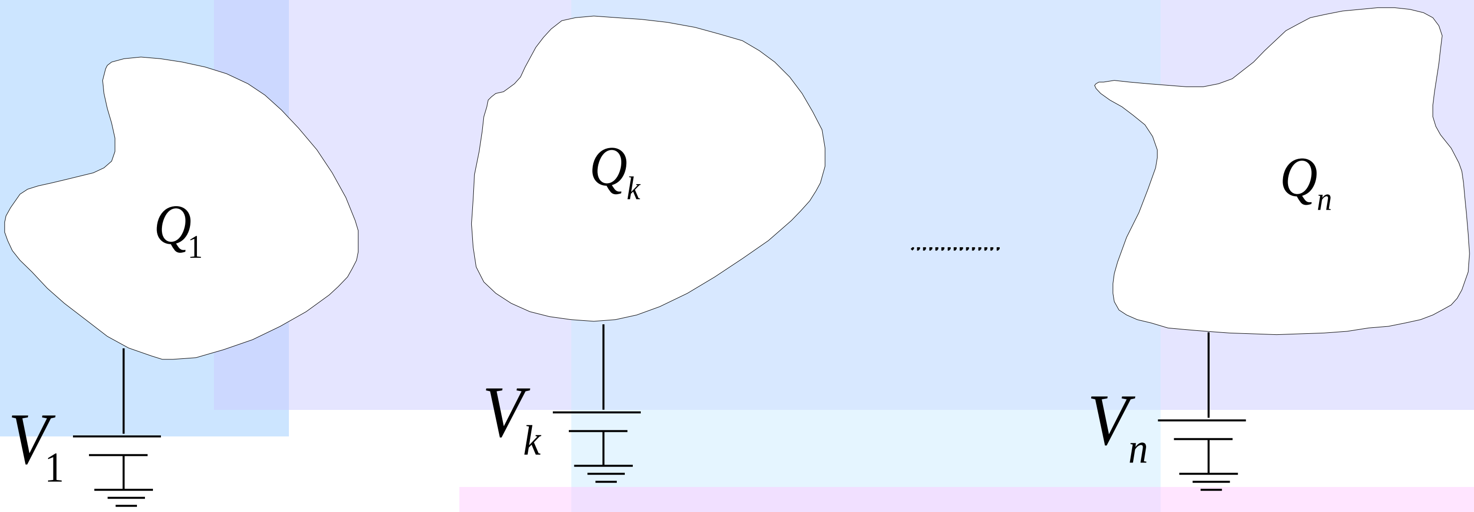


Indica voltaje cero

El potencial de cada conductor está fijo mediante fuentes de voltaje (fuerza electromotríz=fem)

CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

Interesa resolver $\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$



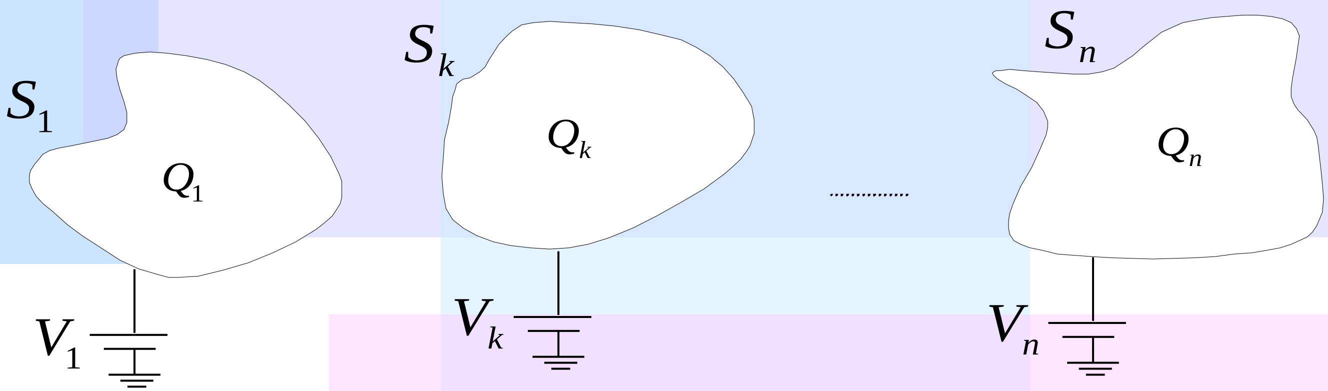
En este caso el potencial en las superficies de los conductores son las condiciones de borde del sistema (además de $V(\vec{r}) = 0$ **para** $\|\vec{r}\| \to \infty$ **)**

CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

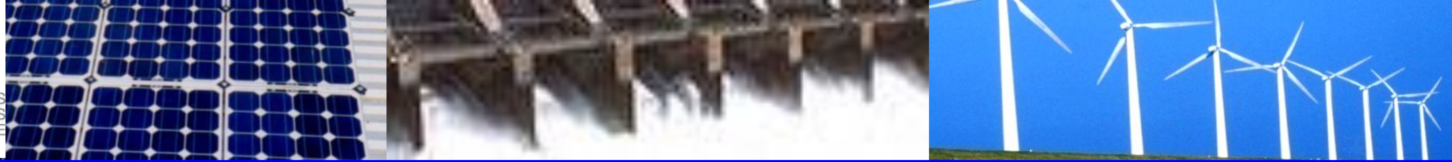
Interesa resolver $$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Condiciones de Borde $$V(S_k) = V_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

$$V(\vec{r}) = 0 \ \text{ para } \|\vec{r}\| \to \infty$$



Se puede demostrar que la solución a este problema es única.



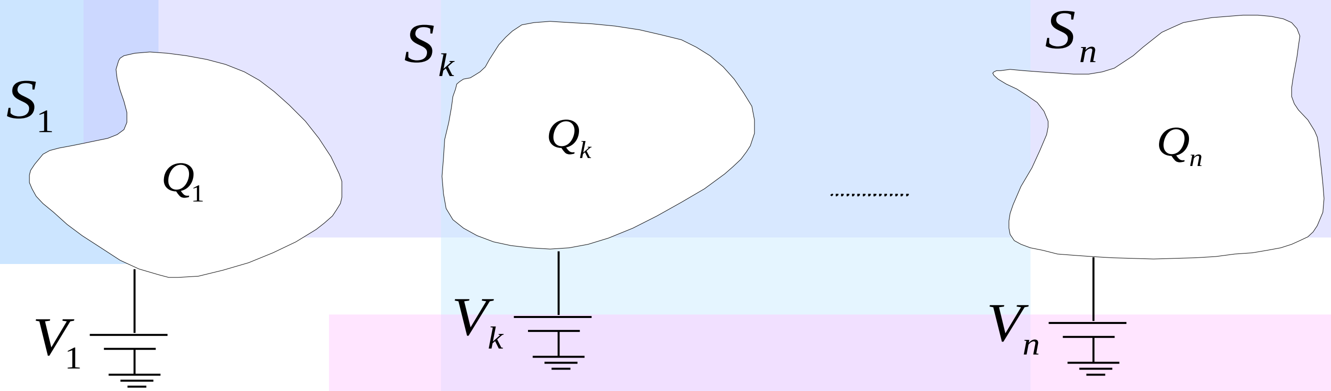
CONDICIONES DE BORDE Y UNICIDAD EC. LAPLACE

O sea, si encontramos una función $\psi(\vec{r})$ que satisface

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0$$

y que además satisface las condiciones de borde

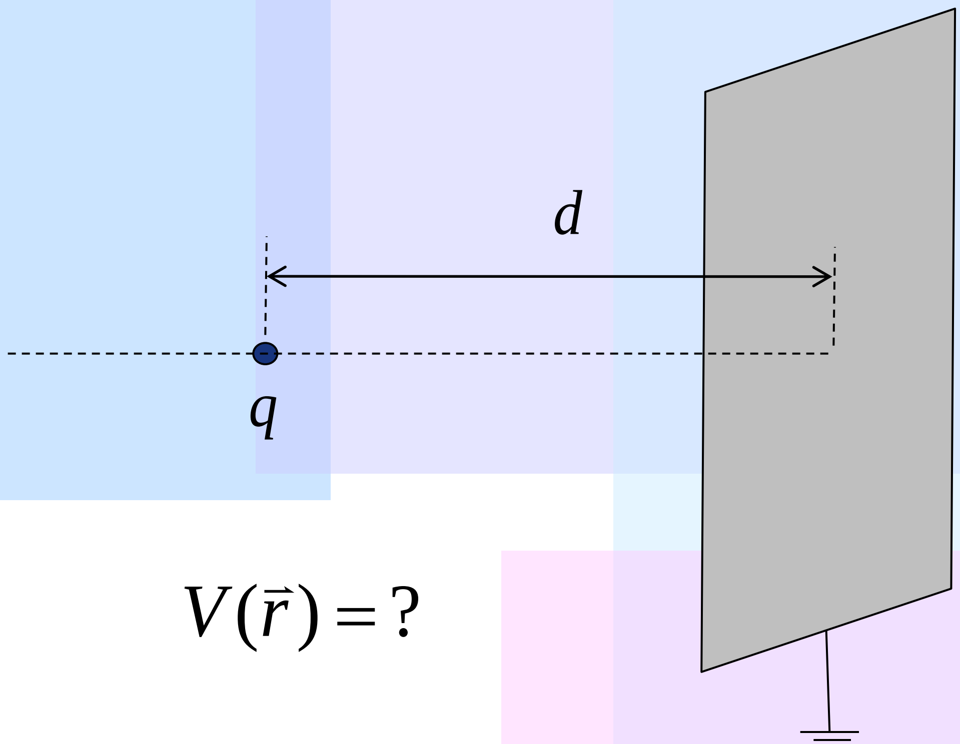
$$\psi(S_k) = V_k \quad (k = 1, \ldots, n) \quad \text{y} \quad \psi(\vec{r}) = 0 \quad \text{para } \|\vec{r}\| \to \infty$$



Entonces $\psi(\vec{r})$ es la función potencial del espacio delimitado por las superficies conductoras

Método de la Carga Imagen

Consideremos un plano infinito conectado a tierra y una carga puntual a una distancia d

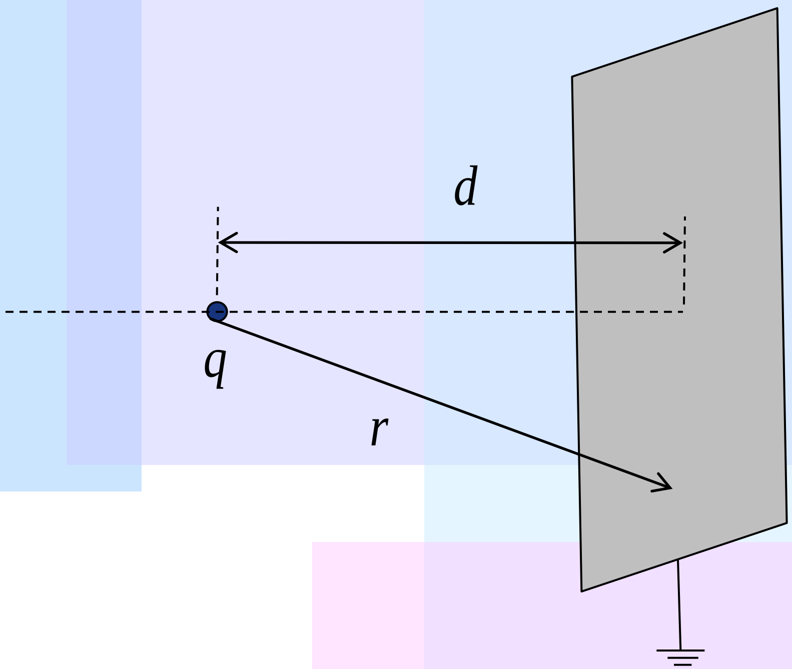


$$V(\vec{r}) = ?$$

Se pide calcular el potencial en el lado de la carga

Método de la Carga Imagen

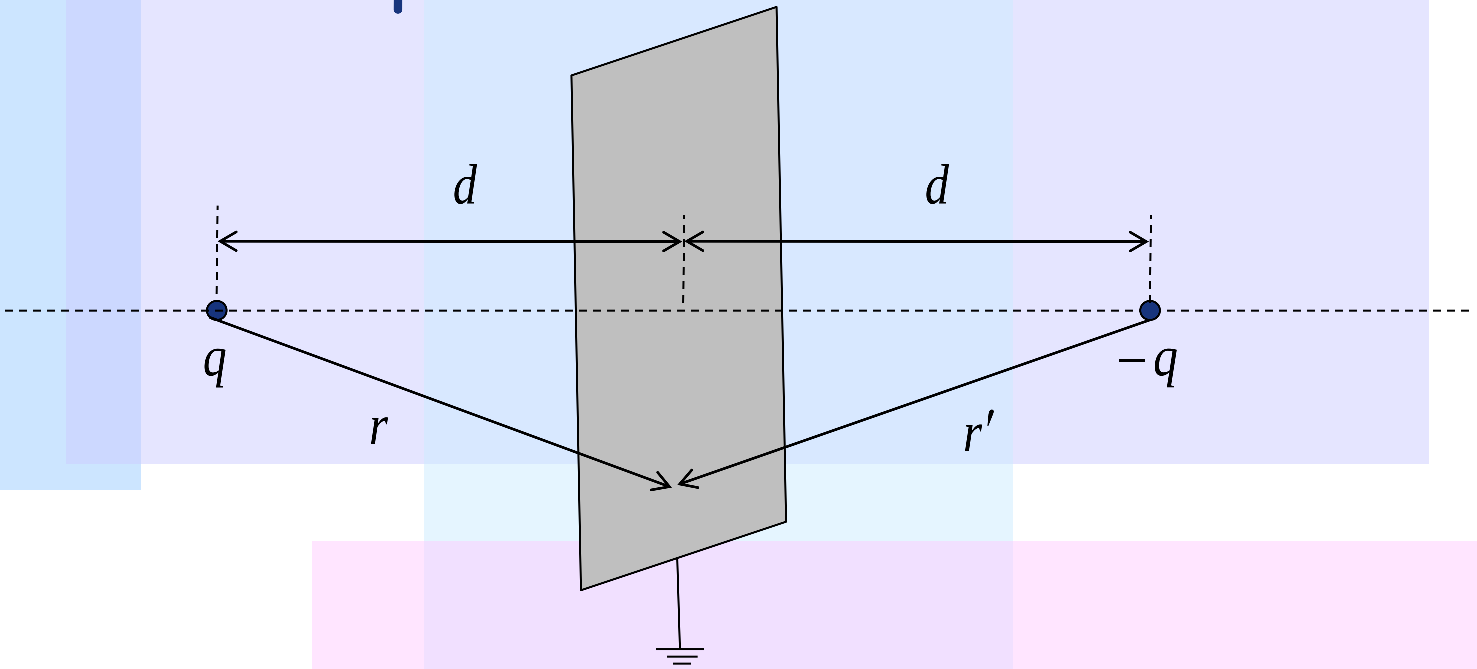
Podemos encontrar una función potencial $\psi(\vec{r})$ que satisfaga $\nabla^2\psi(\vec{r})=0$ y la condición de borde $\psi=0$ en el plano?



Sabemos que el potencial que produce la carga en el plano es $\psi(\vec{r})=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ **(notar que es cero en el infinito)**

Método de la Carga Imagen

Luego, para satisfacer la condición de borde $\psi = 0$ en el plano, podemos ubicar una carga de signo contrario a igual distancia del plano



El potencial en el lado izquierdo es $\psi(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'}$

y como en el plano $r = r'$ se cumple que el potencial es nulo

Método de la Carga Imagen

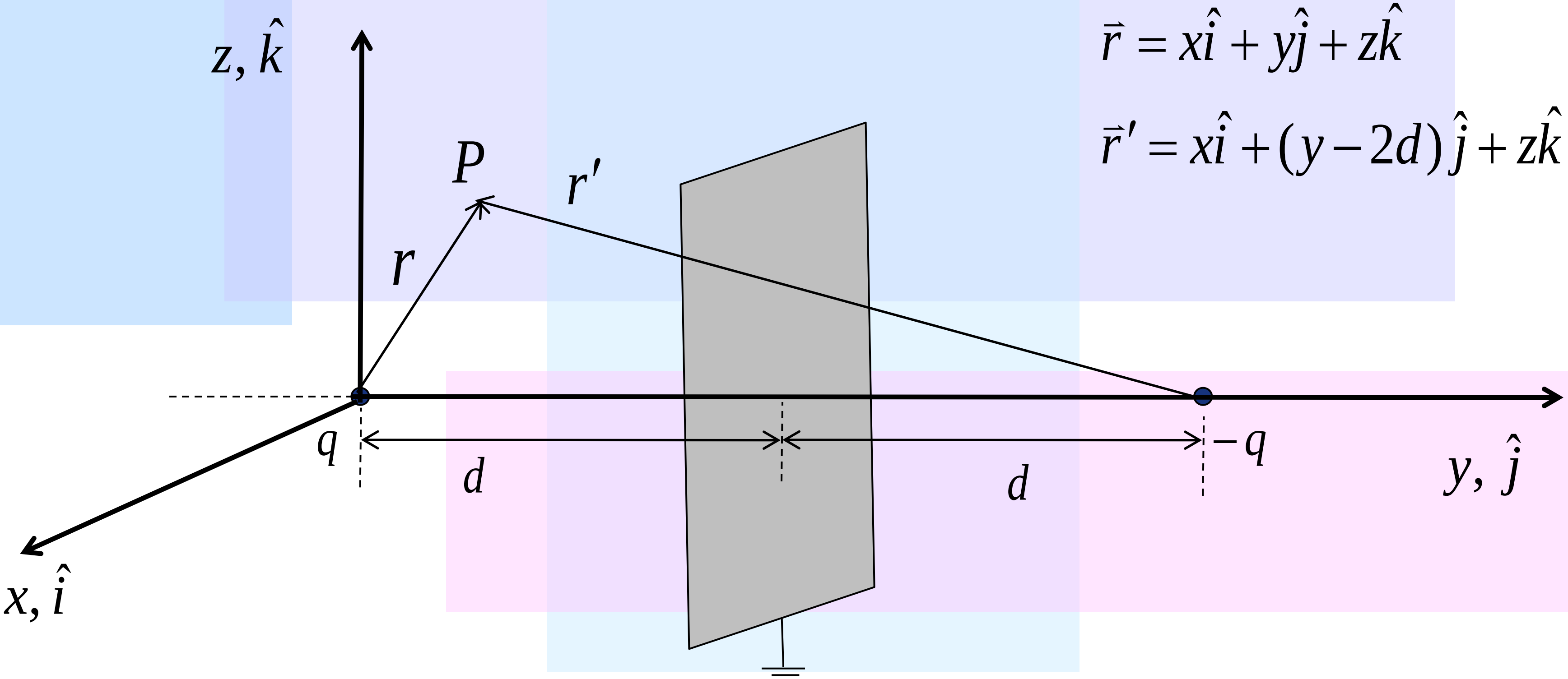
El potencial en cualquier punto P del lado izquierdo es

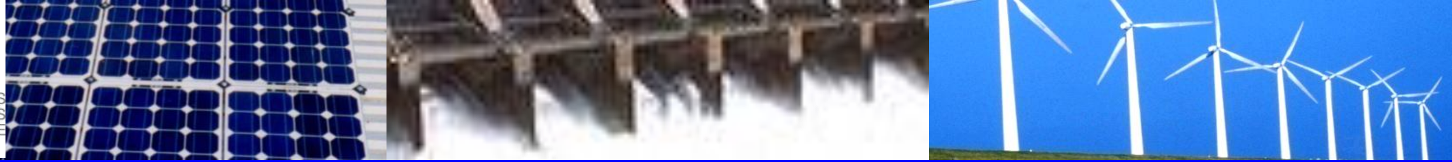
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} - \frac{q}{r'}\right)$$

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \quad \textbf{y} \quad r' = \left(x^2 + (y-2d)^2 + z^2\right)^{1/2}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r}' = x\hat{i} + (y-2d)\hat{j} + z\hat{k}$$





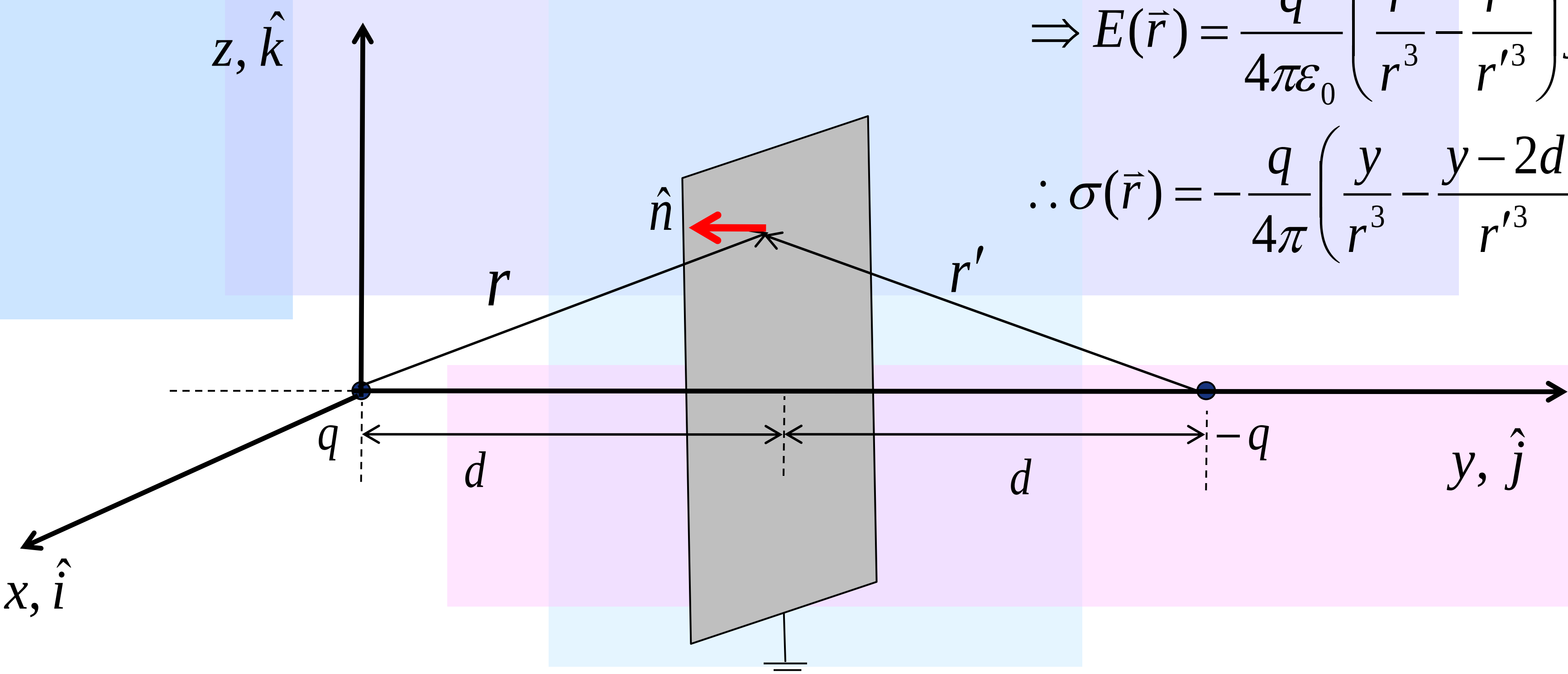
Método de la Carga Imagen

La densidad superficial de carga en el plano es

$$\sigma(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E} \bullet \hat{n} \quad \text{con} \quad \hat{n} = -\hat{j} \quad \text{y} \quad E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\hat{r}}{r^2} - \frac{q\hat{r}'}{r'^2}\right)$$

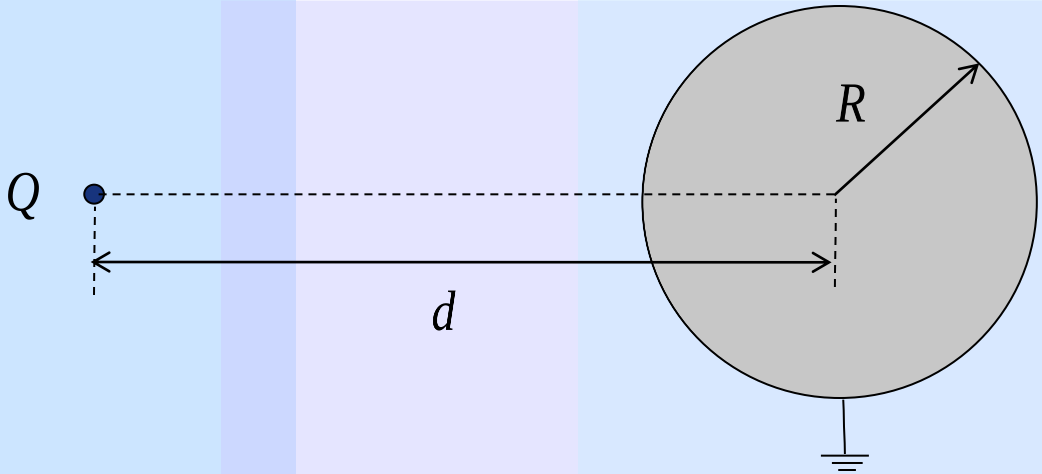
$$\Rightarrow E(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}\,'}{r'^3}\right)\hat{j}$$

$$\therefore \sigma(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi}\left(\frac{y}{r^3} - \frac{y-2d}{r'^3}\right)$$



Método de la Carga Imagen

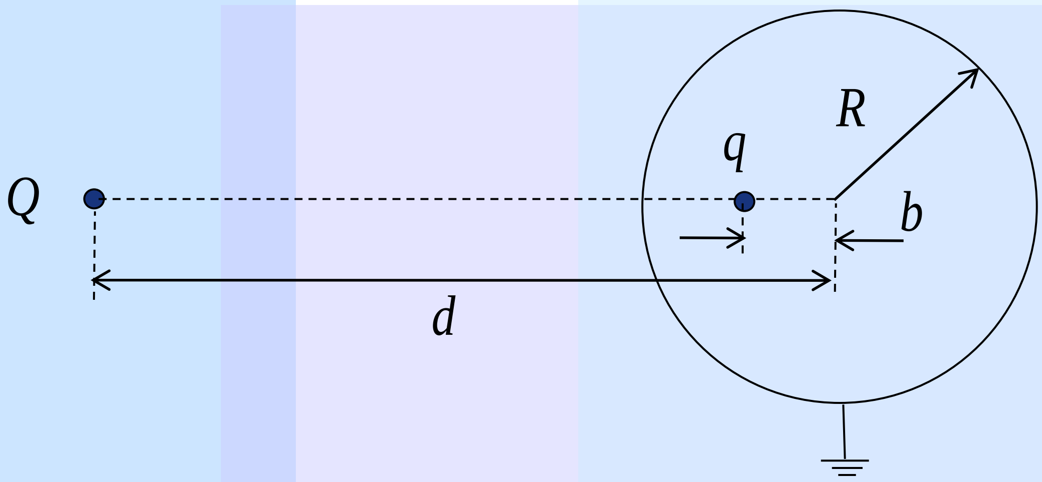
Caso carga frente a esfera a potencial constante



Se pide calcular el potencial en todo el espacio

Método de la Carga Imagen

El potencial dentro de la esfera es nulo.

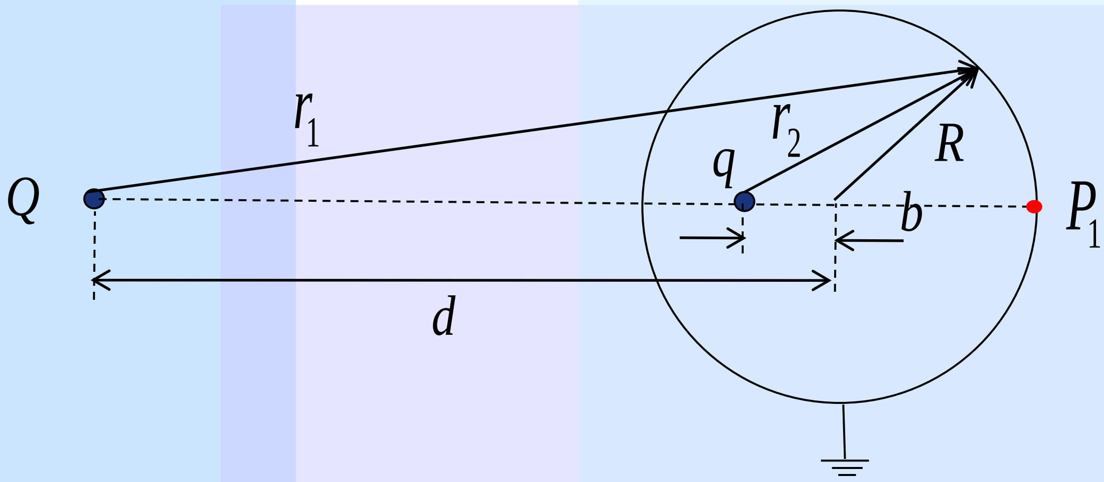


Para calcular el campo fuera usamos el método de la carga imagen. Suponemos una carga q a una distancia b del centro

Método de la Carga Imagen

El potencial en la superficie de la esfera es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right)$$



Evaluando en el punto P_1

$$r_1 = d + R$$

$$r_2 = b + R$$

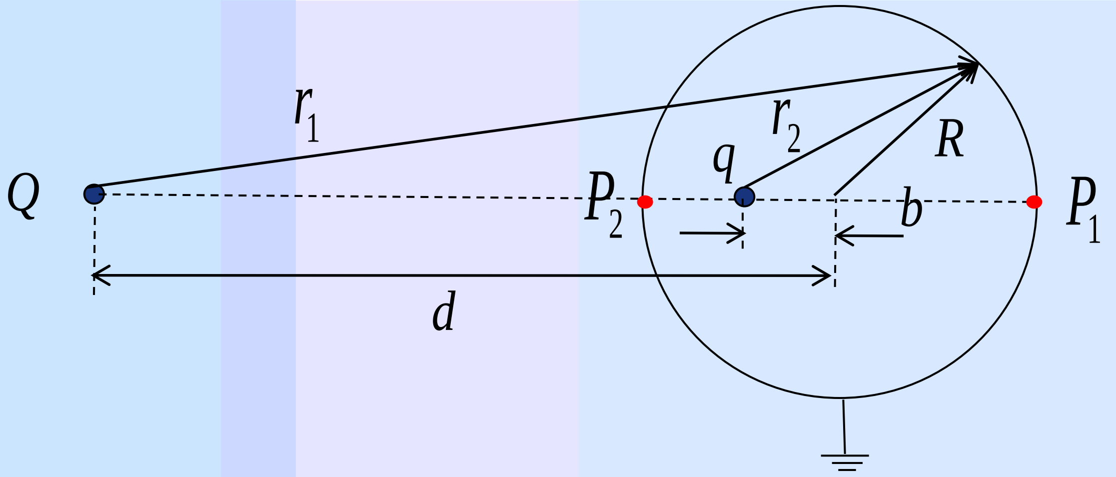
Imponiendo la condición de potencial nulo en P_1

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{d+R} + \frac{q}{b+R}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{d+R} + \frac{q}{b+R} = 0$$

Método de la Carga Imagen

El potencial en la superficie de la esfera es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} + \frac{q}{r_2}\right)$$



Evaluando en el punto P_2

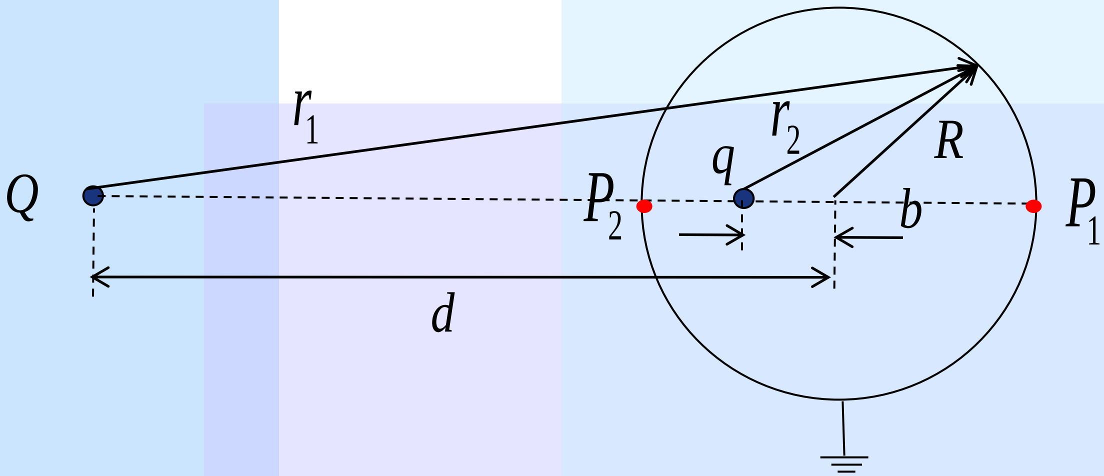
$$r_1 = d - R$$

$$r_2 = R - b$$

Imponiendo la condición de potencial nulo en P_2

$$\frac{Q}{d-R} + \frac{q}{R-b} = 0$$

Método de la Carga Imagen



Tenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{Q}{d+R}+\frac{q}{b+R}=0$$
$$\frac{Q}{d-R}+\frac{q}{R-b}=0$$

$$q=-\frac{R}{d}Q$$
$$b=\frac{R^2}{d}$$

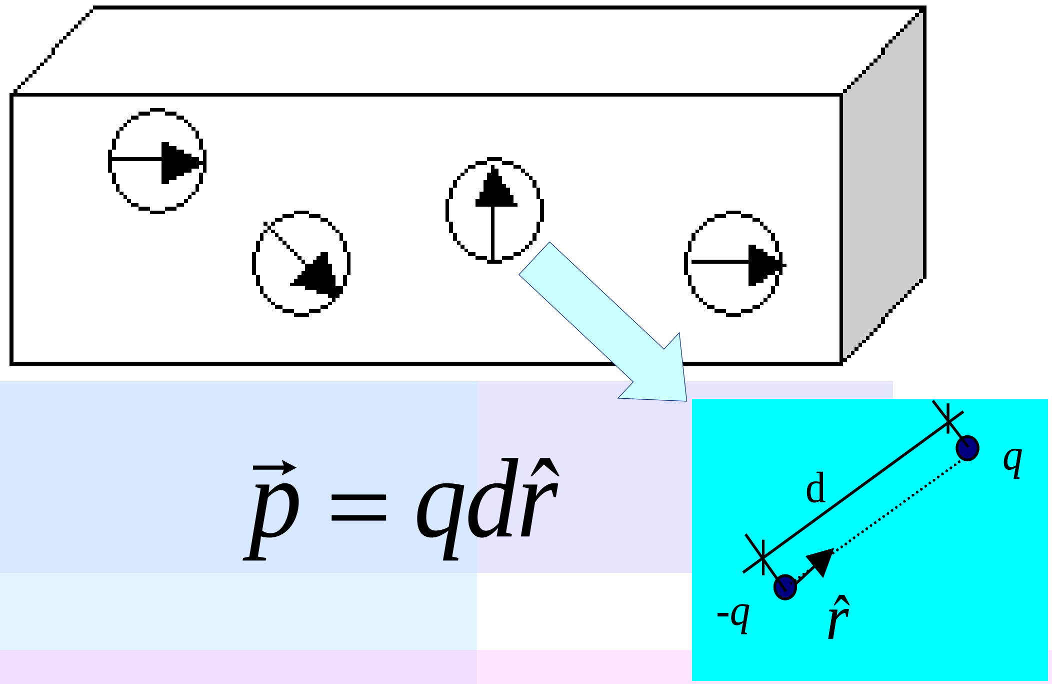
Estos valores de *q* y *b* hacen que el potencial en cualquier punto de la superficie esférica sea también cero. Probarlo!

Resumen medios materiales en electrostática

Dieléctricos

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$



$$\vec{p} = q d \hat{r}$$

Los medios dieléctricos se componen de dipolos que pueden girar en torno a su posición de equilibrio, pero no se desplazan.

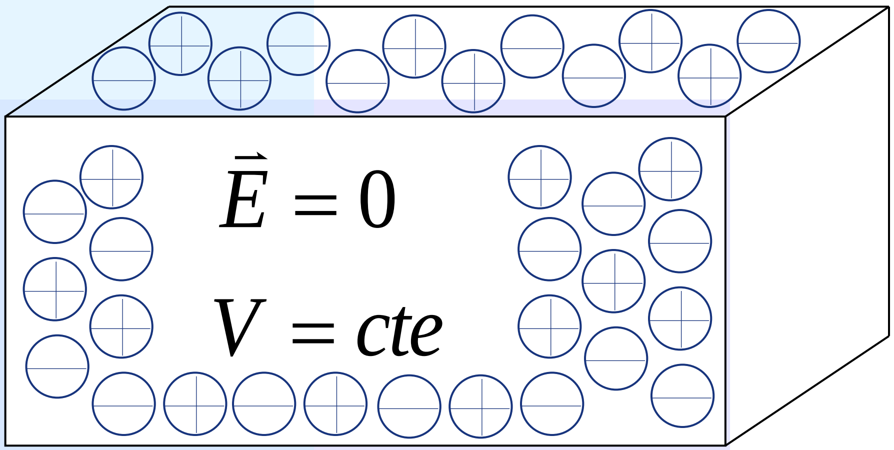
Resumen medios materiales en electrostática

Conductores

- Sólo tiene distribución superficial
- No hay polarización.

$$\vec{E} = 0$$

$$V = cte$$



Los conductores poseen abundantes cargas (positivas y negativas) que pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico