Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

FI 2002 ELECTROMAGNETISMO Clase 11

Fuerza Electromotriz y Energía

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Fuerza electromotriz FEM
- Energía en términos de campo
- Fuerza eléctrica y energía

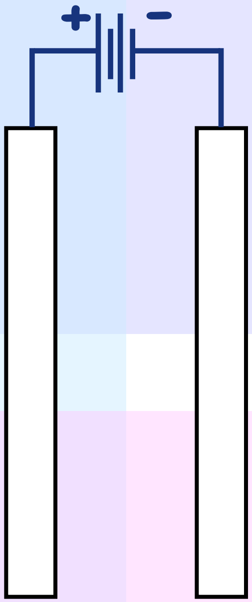
JORGE RÓZSA (Bolivia), Bueyes, 80

Fuerza electromotriz

¿Existen dispositivos capaces de mantener una diferencia de potencial entre dos conductores?

Si

$$V_Q - V_{-Q} = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$



Esto se logra mediante una fem o batería, la cual es un dispositivo que tiene la capacidad para mantener la diferencia de potencial constante entre sus bornes

Fuerza electromotriz

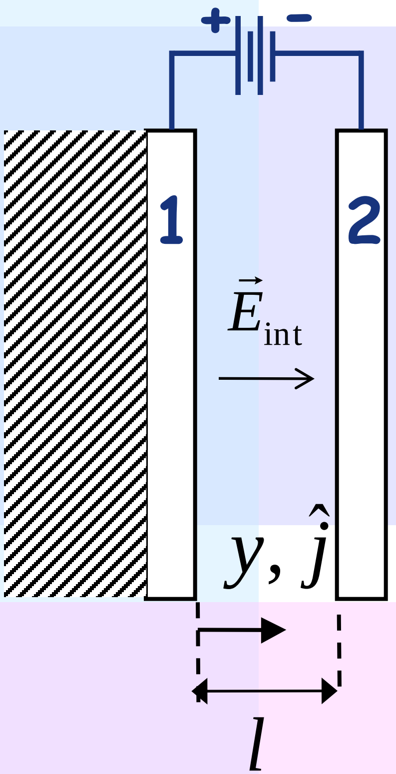
Volviendo al ejemplo tenemos

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \textbf{[volts]}$$

$$V_1 - V_2 = -\int_l^0 \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_0 = -E_0 y \,\Big|_l^0 = El$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{l}\,\hat{j}$$



$$\vec{E}_{\text{int}} = E_0\,\hat{j}$$

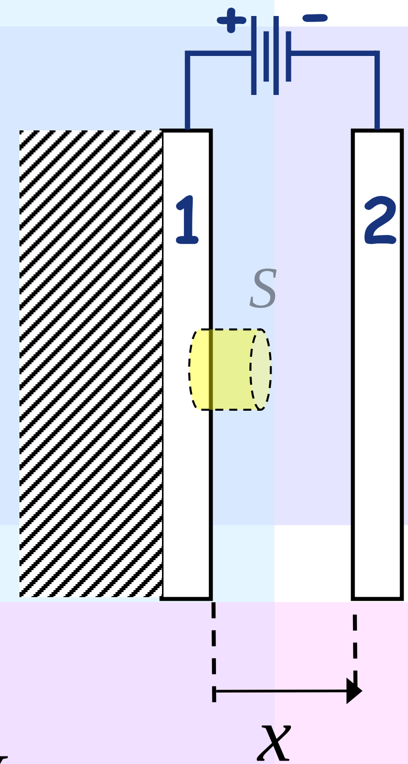
Notar que el campo es función de la distancia de separación entre las placas

Fuerza electromotriz

Hagamos *l*=*x* variable

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \text{[volts]}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{x}\,\hat{j}$$



Usando la Ley de Gauss

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \quad y \quad Q_T = \sigma \Delta S$$

$$\oint\!\!\!\oint_s \vec{E} \bullet d\vec{s} = \iint_{tapa} \frac{V_0}{x}\,\hat{j} \bullet ds\hat{j} = \frac{V_0}{x}\Delta S$$

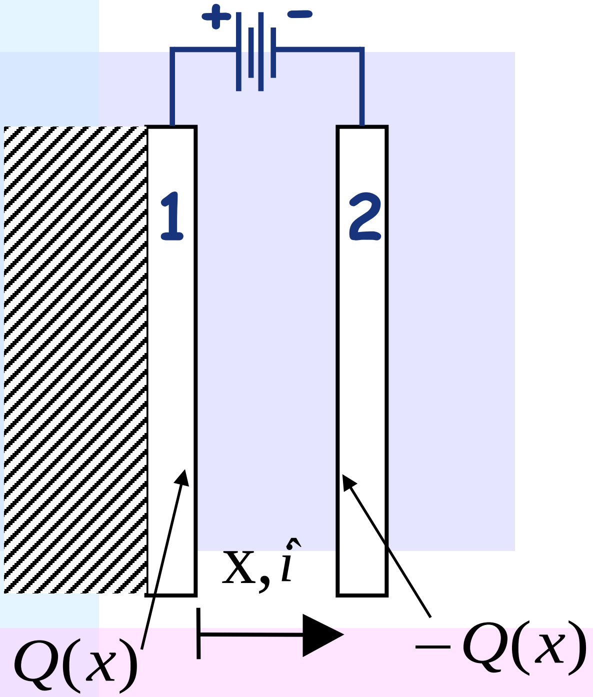
$$\Rightarrow \frac{V_0}{x}\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \qquad \therefore \sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Notar que $\sigma = \sigma(x)$

Fuerza Electromotriz

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \text{[volts]}$$

$$\Delta V = V_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x \Rightarrow \sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$



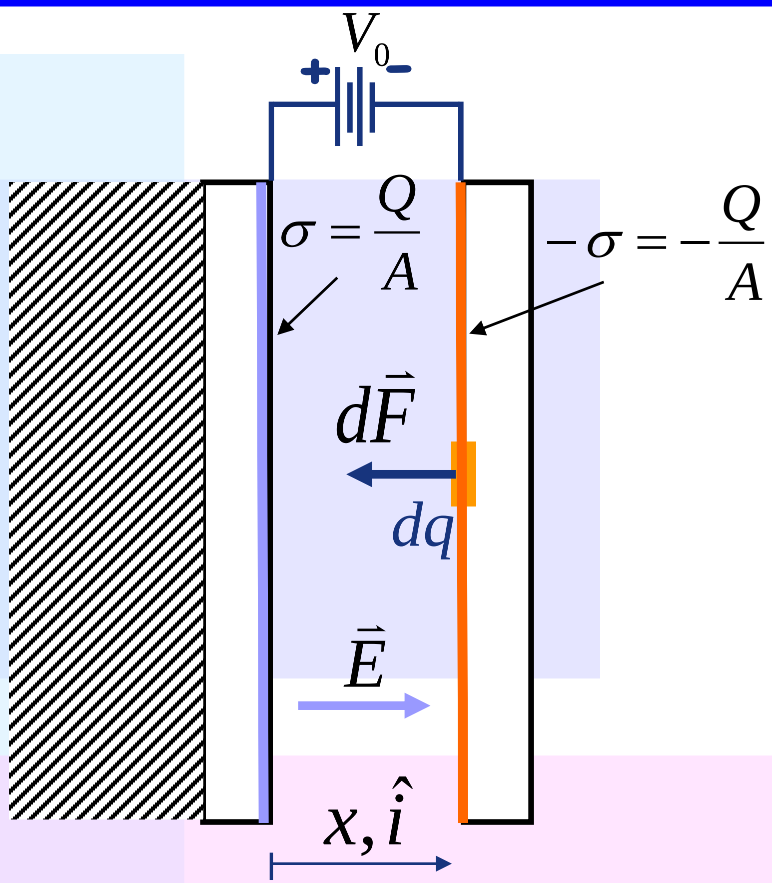
La carga en los conductores es

$$Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Si x varia, entonces la densidad de carga varia para satisfacer la condición de diferencia de potencial constante. Esta tarea la realiza la batería o fem.

Fuerza electromotriz

Calculemos nuevamente la fuerza producida entre las placas



$$d\vec{F} = \vec{E}dq \qquad \vec{E} = \frac{\sigma(x)}{2\varepsilon_0}\hat{j}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\vec{F} = -\iint_A \frac{V_0}{x}\hat{j}\sigma(x)\,dydz = -\frac{V_0\sigma(x)}{x}A\hat{j}$$

$$\sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

$$\therefore \quad \vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{x^2}\hat{j}$$

Fuerza es función de x

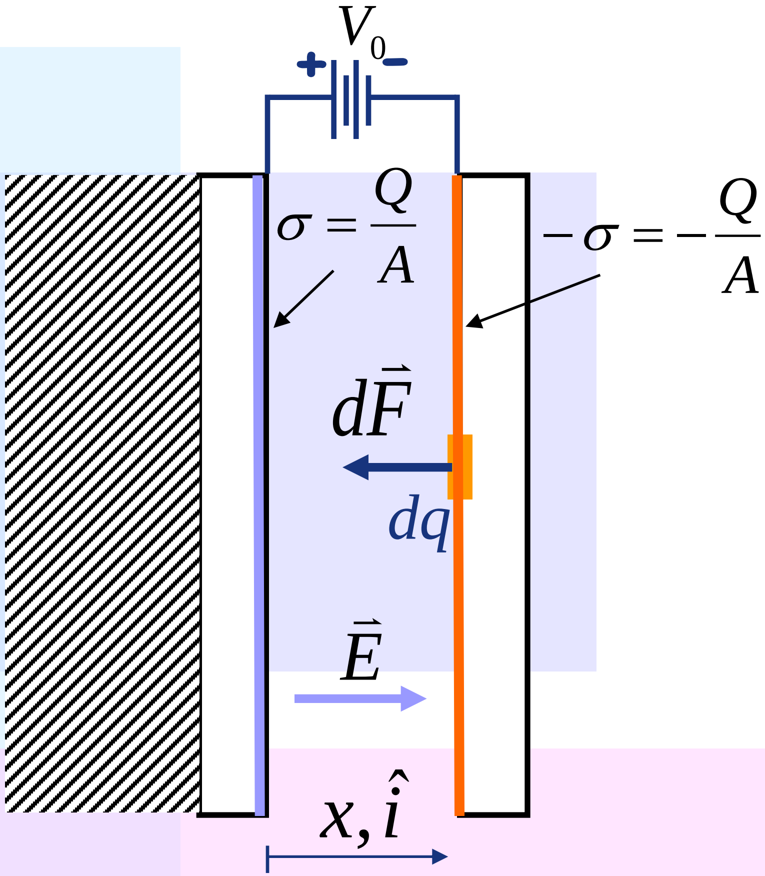
Fuerza electromotriz

Expresemos esto en términos de la carga

$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{x^2}\hat{j} \qquad \sigma(x) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

$$\vec{F} = -\frac{A\varepsilon_0 V_0}{x} \times \frac{A\varepsilon_0 V_0}{x} \times \frac{1}{A\varepsilon_0}\hat{j}$$

$$\vec{F} = -A\sigma(x) \times A\sigma(x) \times \frac{1}{A\varepsilon_0}\hat{j}$$



$$\vec{F} = -\frac{Q^2(x)}{A\varepsilon_0}\hat{j}$$

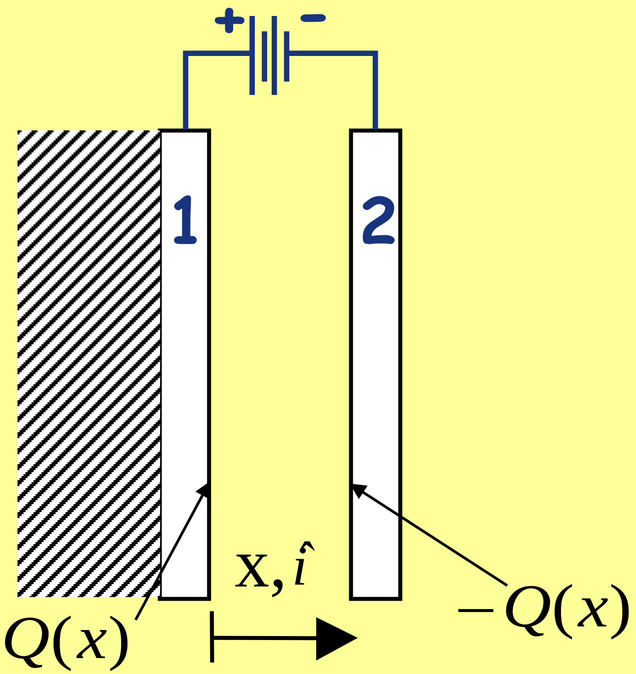
Fuerza es función de x

Fuerza electromotriz

Si hay fem

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i} \quad \textbf{donde } Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

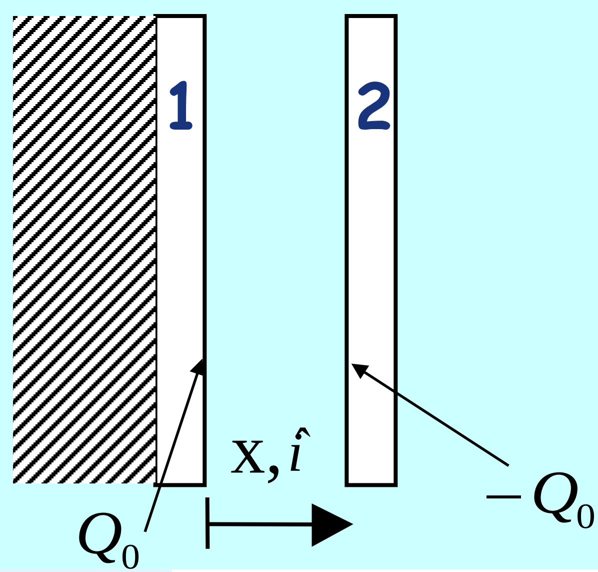
$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \textbf{[volts]}$$



Si no hay fem

$$\vec{F} = -\frac{Q_0^{\,2}}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = Ex = \frac{Q_0}{A\varepsilon_0}x \quad \textbf{[volts]}$$

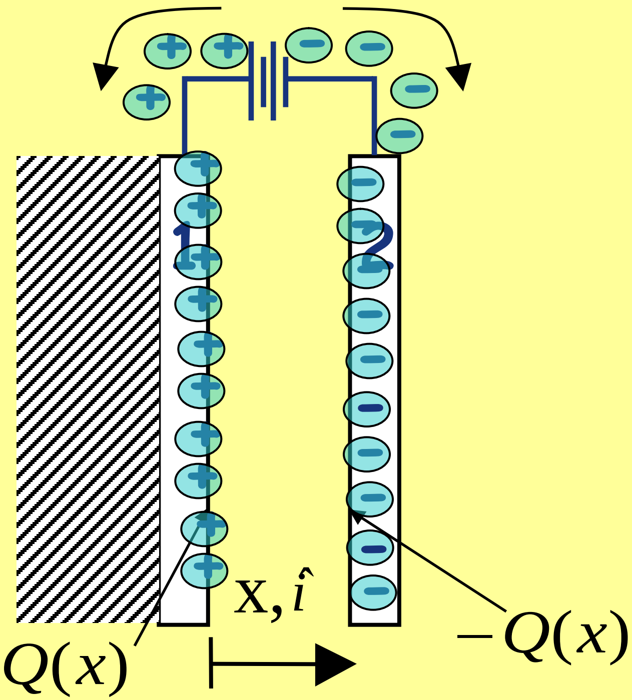


Fuerza electromotriz

Si hay fem

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i} \quad \textbf{donde } Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

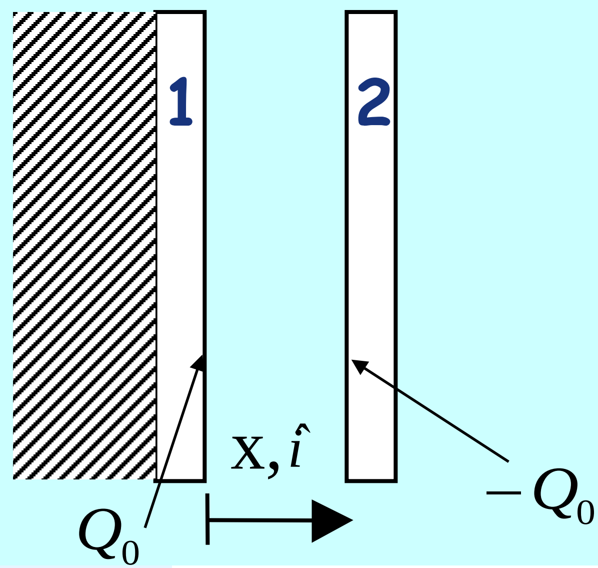
Trabajo realizado por fem



Si no hay fem

$$\vec{F} = -\frac{Q_0^{\ 2}}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

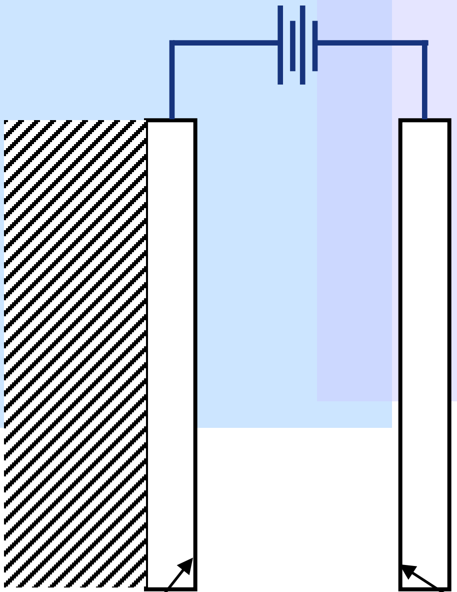
$$V_1 - V_2 = \Delta V = Ex = \frac{Q_0}{A\varepsilon_0}x \quad \textbf{[volts]}$$



Trabajo de la Fuerza electromotriz

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i}$$ **donde** $$Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

$\Delta V = V_0$



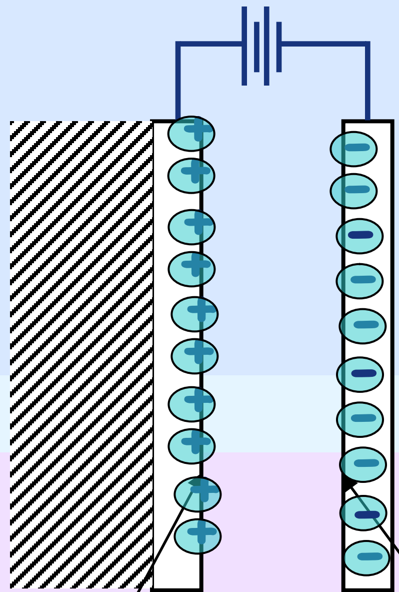
Q_0 $\quad x, \hat{i}$ $\quad -Q_0$

$$Q_0 = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x}$$

Energia inicial

$U = Q_0 V_0$

$\Delta V = V_0$



$Q(x)$ $\quad x - \Delta x$ $\quad -Q(x)$

$$Q(x) = A\frac{\varepsilon_0 V_0}{x - \Delta x}$$

Energia final

$U = Q(x) V_0$

$$\Rightarrow \Delta U = \left(Q(x) - Q_0\right)V_0$$

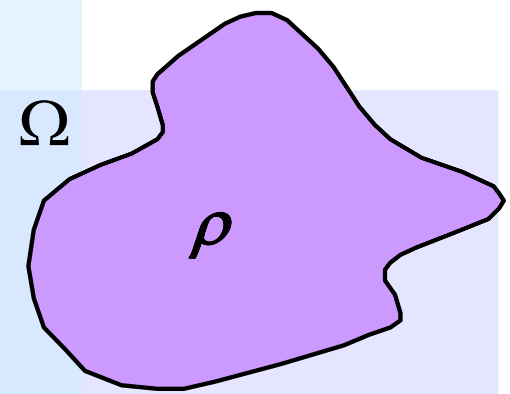
$$Q(x) - Q_0 = A\varepsilon_0 V_0\left(\frac{1}{x - \Delta x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$\underbrace{\Delta Q \approx A\varepsilon_0 V_0 \frac{\Delta x}{x^2}}_{\text{Carga entregada por fuente}}$$

Energía en términos de Campos

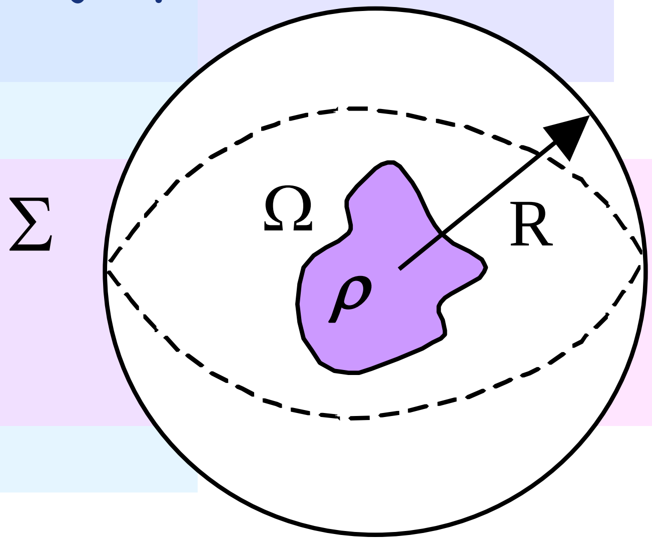
Habíamos visto que en distribuciones de carga en volumen

$$W = U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$



ρ será nulo en todo punto fuera del volumen Ω, luego podemos extender el espacio de integración a un espacio mayor, por ejemplo una esfera Σ de radio R

$$W = U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

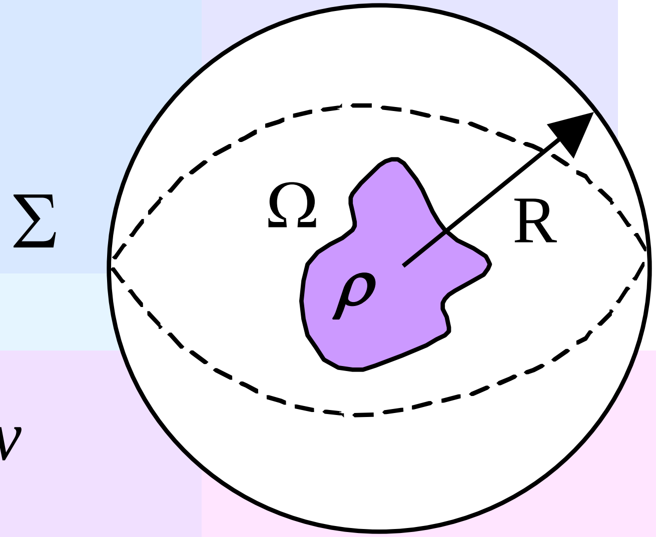


Energía en términos de Campos

Por la 1ª ecuación de Maxwell se cumple

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho(\vec{r}) \qquad \Rightarrow U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} (\nabla \cdot \vec{D}) V dv$$

y usando $\nabla \cdot f\vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{A})$



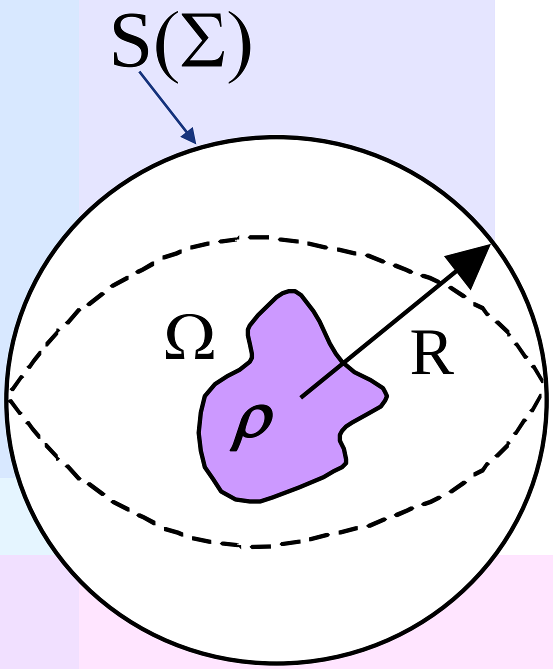
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \nabla \cdot [V\vec{D}] dv - \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Energía en términos de Campos

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint_{\Sigma} \nabla \cdot \left[V\vec{D}\right] dv = \oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \bullet d\vec{s}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv$$



pero $V \propto \frac{1}{r}$ **y** $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow V\vec{D} \propto \frac{1}{r^3}$

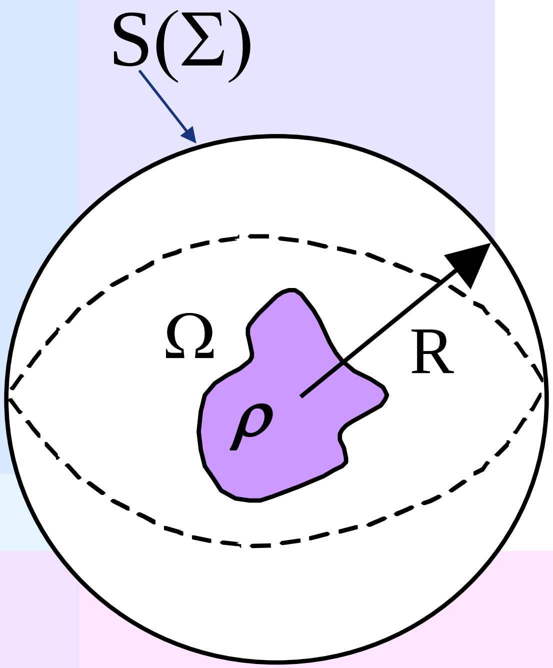
si R→∞ $\oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s} \to 0$ $\Rightarrow U = -\frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \left(\nabla V\right) dv$

Energía en términos de Campos

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\left(\nabla V\right)dv$$

Aplicando $\nabla V = -\vec{E}$

$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$$



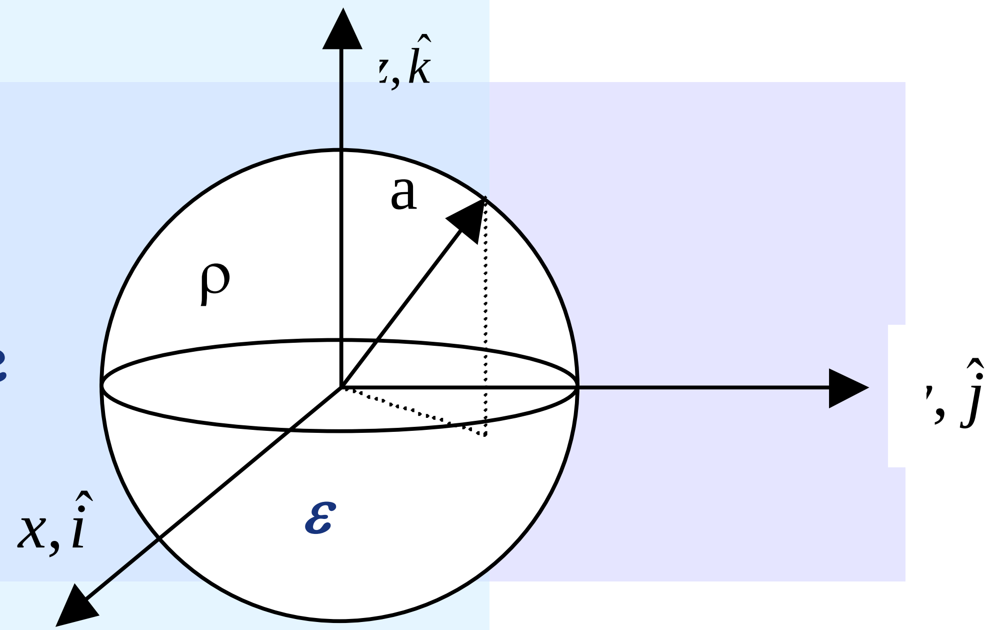
Aquí Σ es todo el espacio

$$W_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$ **es la densidad de energía electrostática**

Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

Esfera dieléctrica cargada con densidad ρ.

Si $\rho = \rho_0$ es constante se pide calcular la energía electrostática del sistema



Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

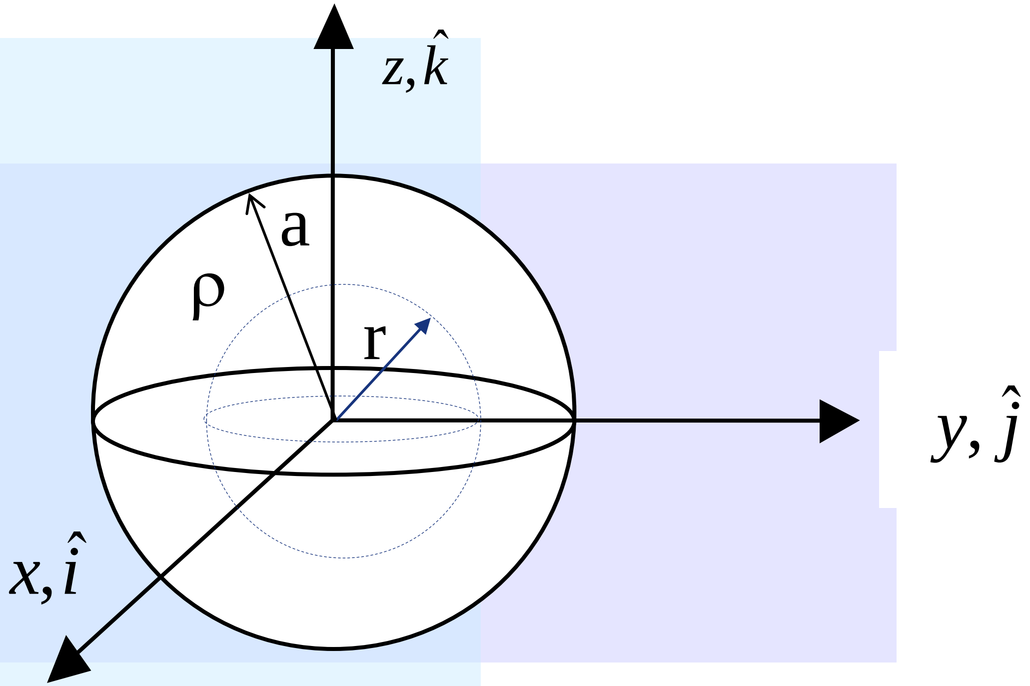
Ejemplo

Para r < a

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} r\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} r\hat{r}$$



Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

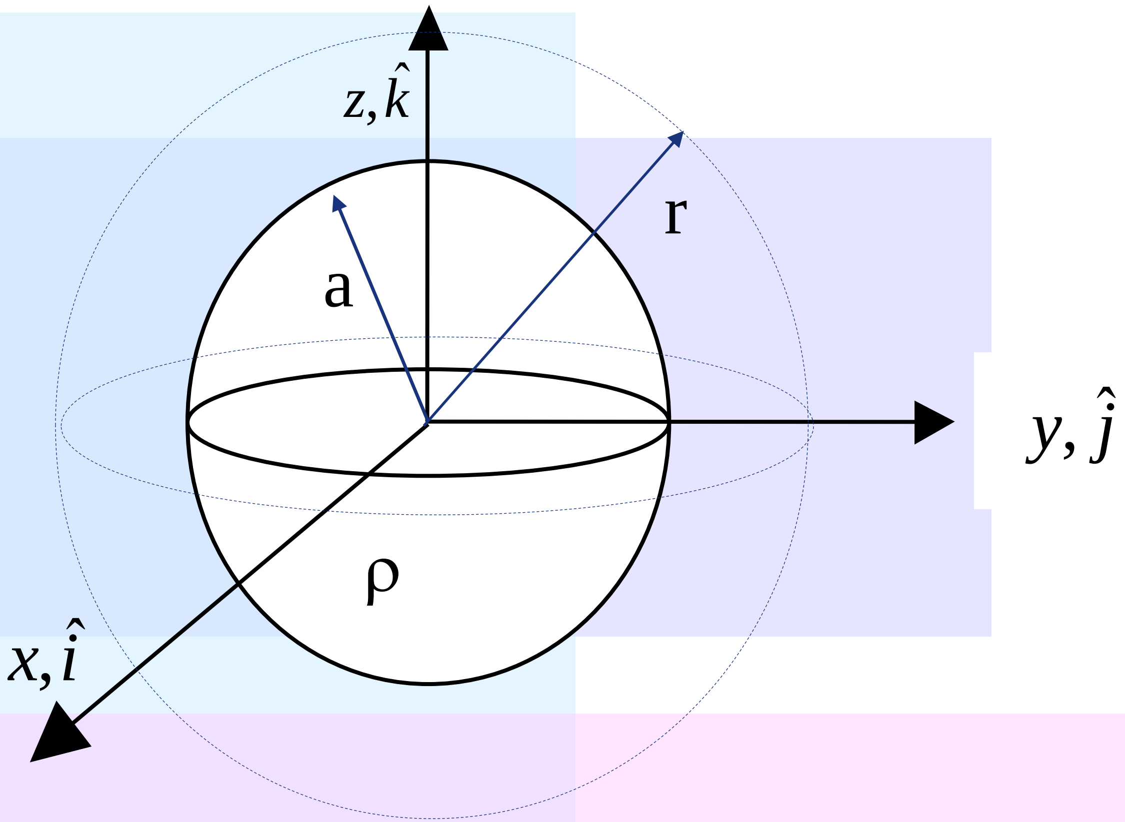
Ejemplo

Para r ≥ a

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_o}{3}\frac{a^3}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

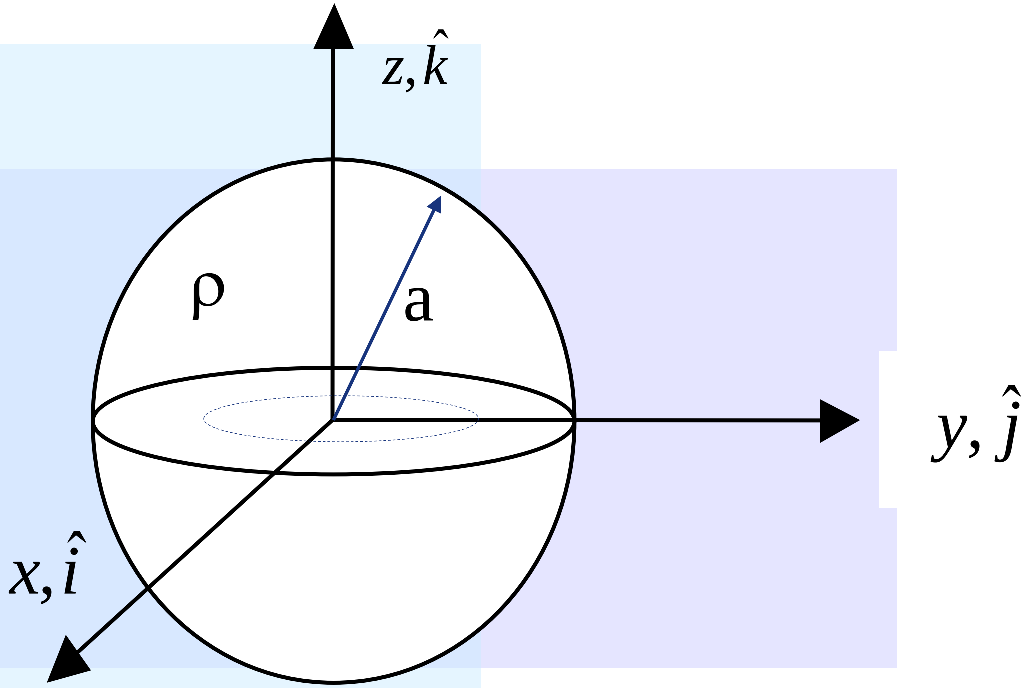


Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

Ahora aplicamos la fórmula

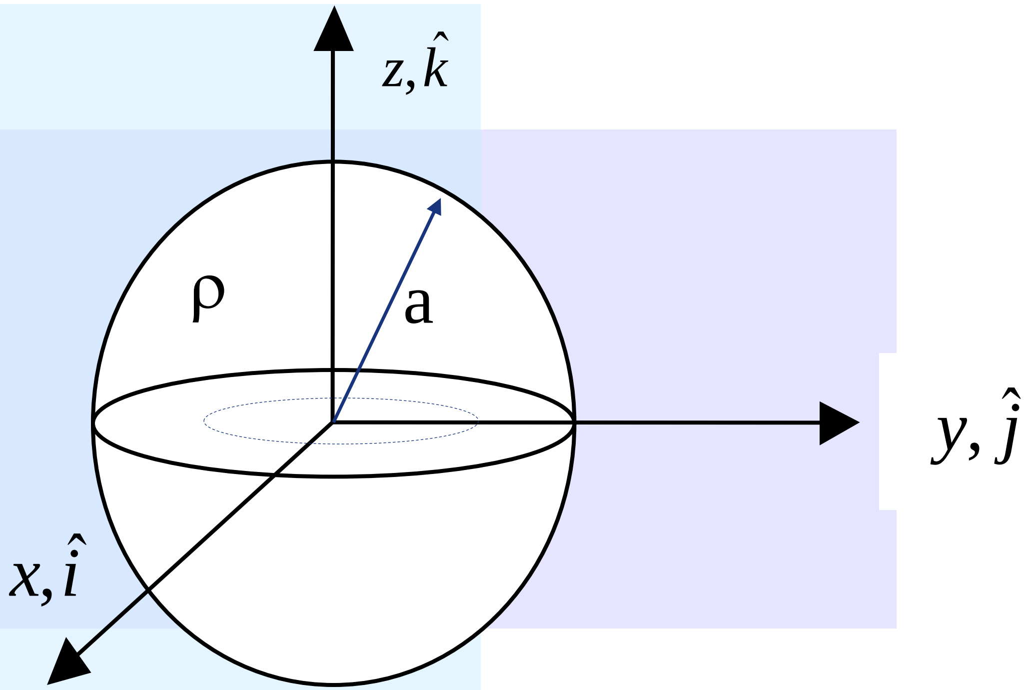
$$\therefore U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}dv$$



$$U = \frac{1}{2}\iiint_{esfera} \vec{D}\cdot\vec{E}dV + \frac{1}{2}\iiint_{resto} \vec{D}\cdot\vec{E}dV$$

Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\Sigma} \vec{D}\cdot\vec{E}dv$$

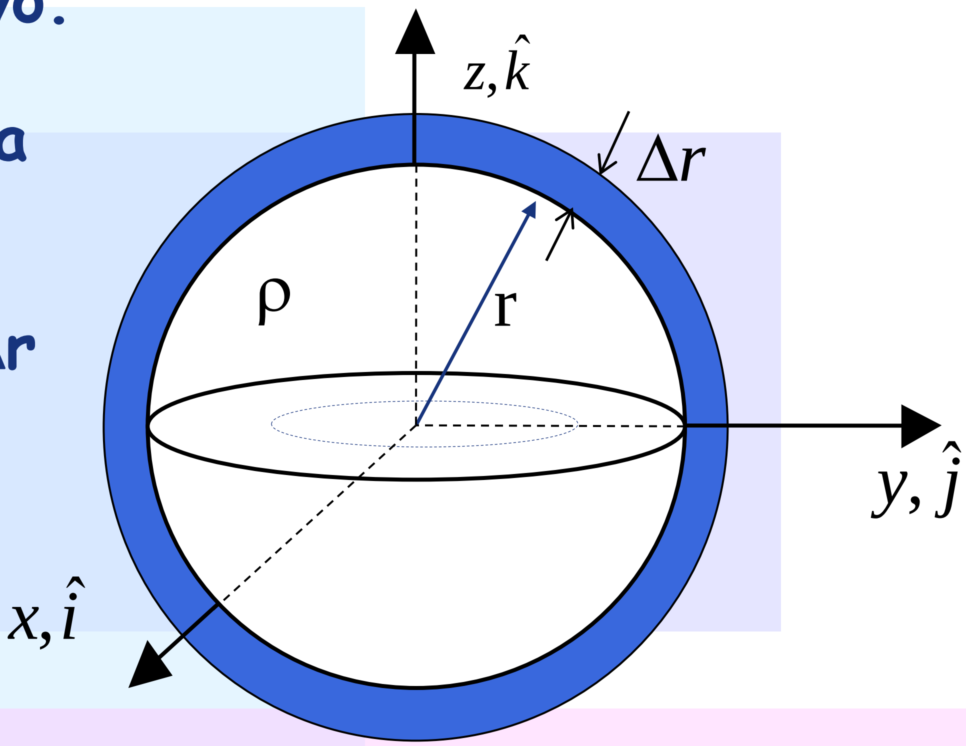


Obtenemos

$$\Rightarrow U = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\varepsilon} + \frac{10\pi\rho_0^2 a^5}{45\varepsilon_0}[J]$$

Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

Propuesto: Método Alternativo.
Cálculo de la energía de una distribución esférica de carga



La energía necesaria para traer un casquete de ancho Δr desde el infinito es

$$dU = \frac{Q(r)dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}[J]$$

Donde:

$Q(r)$ Es la carga almacenada en la esfera de radio r

dQ Carga en casquete de ancho Δr