FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 10
Conductores en Electrostática-II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INDICE

LOS RIOS
Giuseppe Ungaretti (1888-1970)

Me apoyo en este árbol mutilado
abandonado en esta hondonada
que tiene la languidez
de un circo
antes o después del espectáculo
y miro
el pasaje quieto
de las nubes sobre la luna

Esta mañana me he tendido
en una urna de agua
y como una reliquia
he reposado

El Isonzo Huyendo
me pulía
como a una de sus piedras

He alzado
mis cuatro huesos
y me fui
como un acróbata
sobre el agua

Me he arrodillado
junto a mis ropas
sucias de guerra
y como un beduino
me he inclinado a recibir
el sol

Este es el Isonzo
donde mejor
me he reconocido
una dócil fibra
del universo

Mi suplicio
es cuando
no me creo
en armonía

Pero aquellas ocultas
manos
que me amasan
me regalan
la rara
felicidad

He repasado
las épocas
de mi vida

Estos son mis ríos

Este es el Serchio
al cual están unidos
dos mil años casi
de mi gente campesina
y mi padre y mi madre

Este es el Nilo
que me ha visto
nacer y crecer
y arder de inconsciencia
en las extensas llanuras

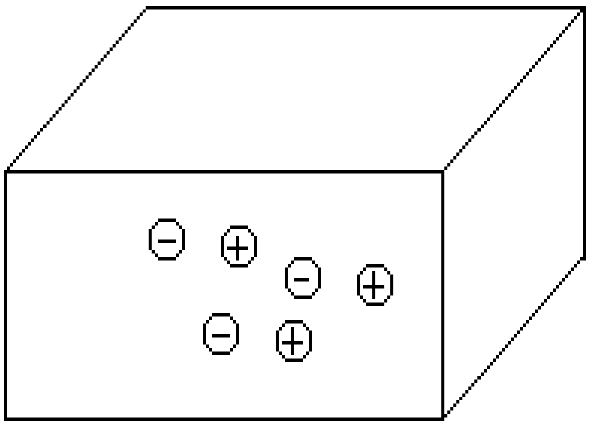
Este es el Sena
y en su turbulencia
me he mezclado
y me he conocido

Estos son mis ríos
reunidos en el Isonzo

Esta es mi nostalgia
que en cada uno
me vislumbra
ahora que es de noche
que mi vida me parece
una corola de tinieblas

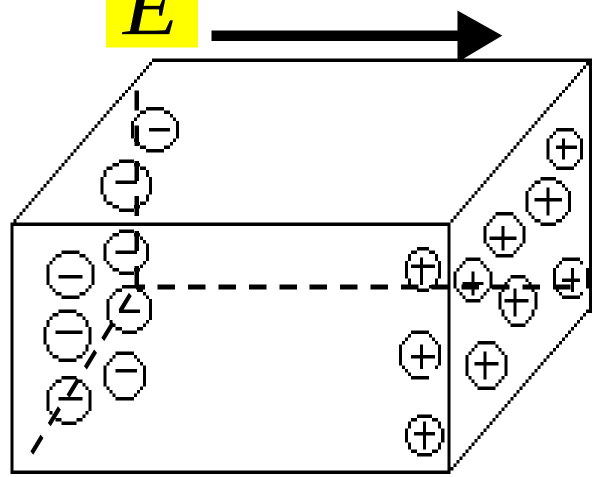
Modelo Básico de Conductores

Sin Campo eléctrico



Carga neta nula

$\vec{E}$

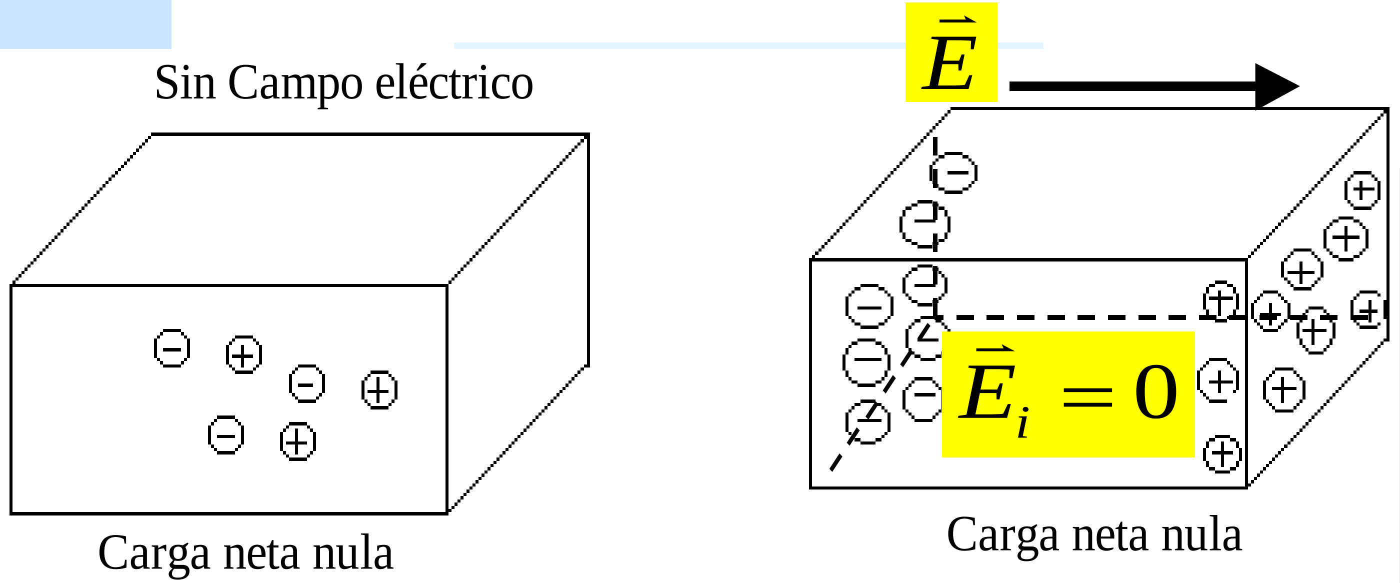


Carga neta nula

- Abundantes cargas (positivas y) negativas
- Pueden moverse libremente en presencia de un campo eléctrico

Estado de Equilibrio ⇒ **Campo eléctrico nulo en el interior**

Propiedades



Para el Estado de Equilibrio electrostático se cumple:

1. La carga sólo se redistribuye en la superficie

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho_l = 0$$

Propiedades

2. Toda la superficie del conductor es una superficie equipotencial

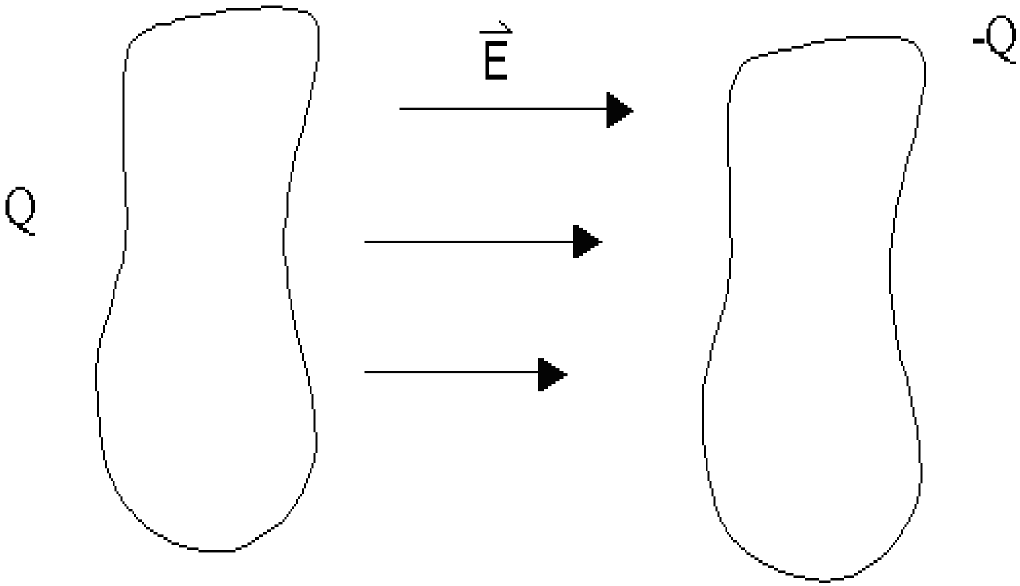
$$\vec{E} = 0 \;\Rightarrow \Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

No existe diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera al interior del conductor

3. El campo eléctrico inmediatamente afuera del conductor es normal a la superficie del conductor

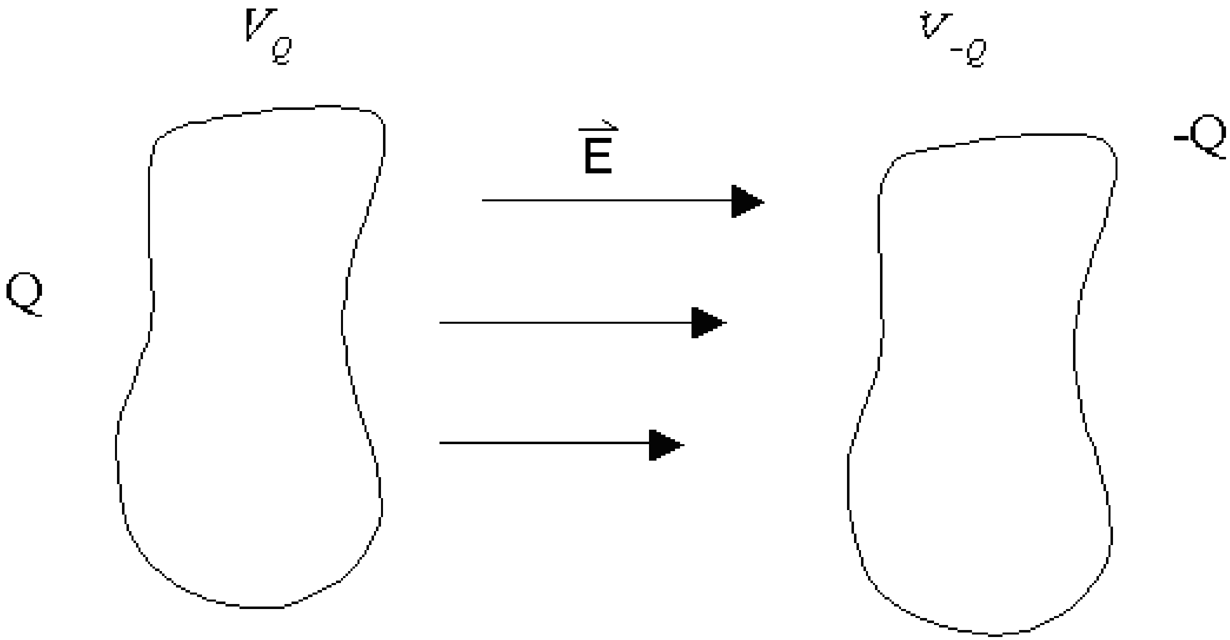
$$D_n = \varepsilon_0 E_n \;\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

Condensadores



Sistema de dos conductores en donde la carga de uno de ellos es de igual magnitud pero de signo contrario al otro.

Condensadores



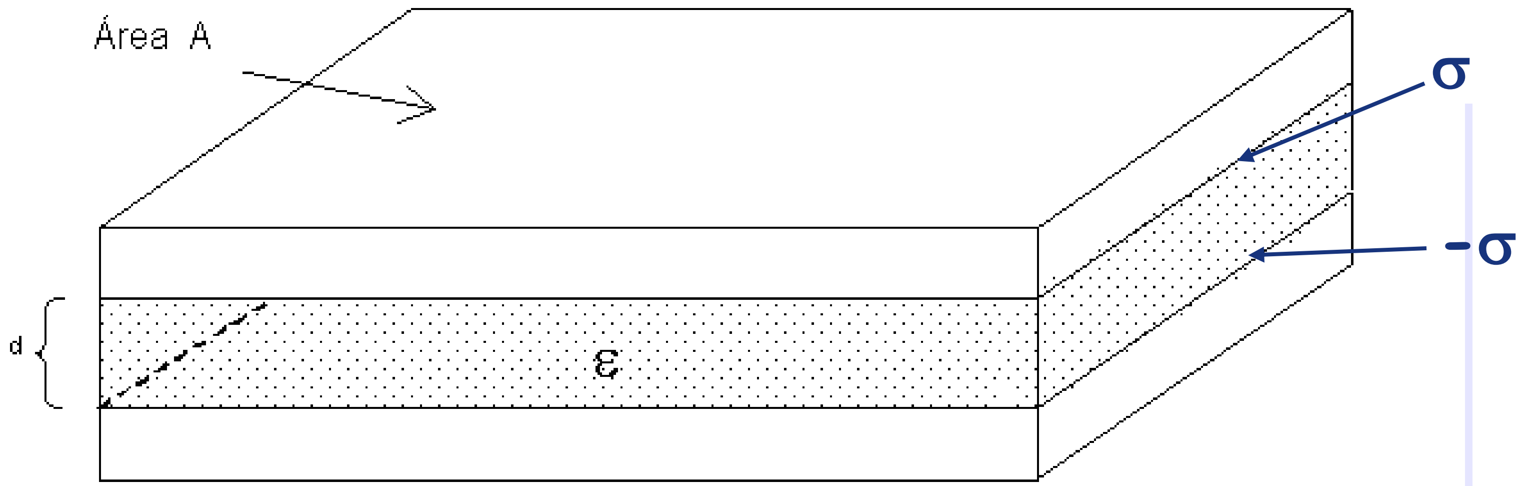
$$V_Q > V_{-Q}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{V_Q - V_{-Q}} > 0$$

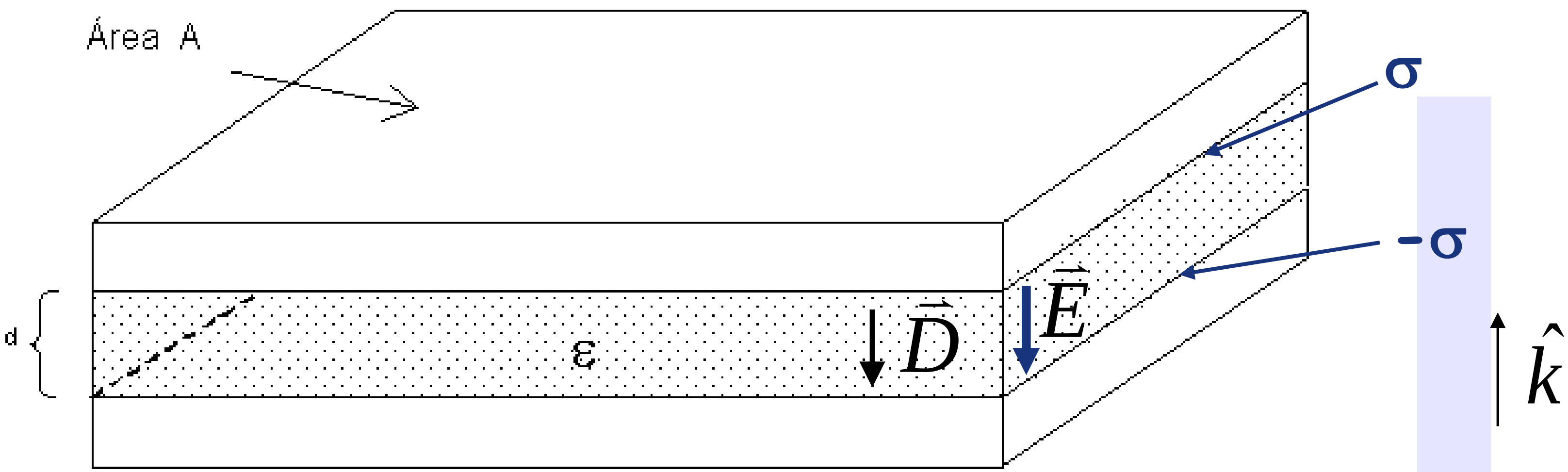
Se caracteriza a través de su capacidad C

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}$$

Ejemplo



Ejemplo



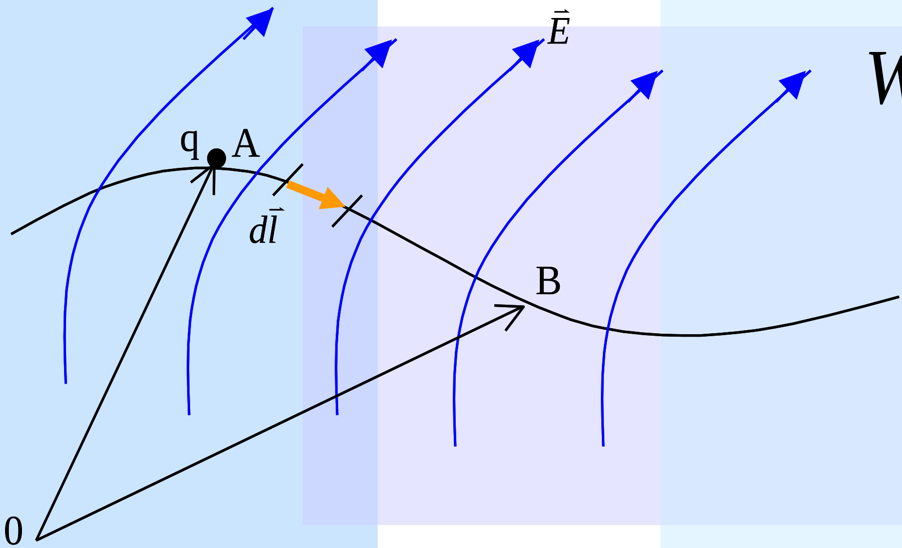
$$\vec{D} = -\sigma\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \Rightarrow \quad -\int_{-d}^{0} \vec{E} \bullet d\vec{l} = V_{\sigma} - V_{-\sigma} \quad \Rightarrow \overbrace{V_{\sigma} - V_{-\sigma}}^{\Delta V} = \frac{\sigma}{\varepsilon} d$$

$$Q = \sigma A \;\; y \;\; \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} d, \quad luego \quad C = \frac{\sigma A}{\sigma \frac{d}{\varepsilon}} \Rightarrow \boxed{C = \varepsilon \frac{A}{d}}$$

Menor d $\Rightarrow$ mayor C,
Mayor A $\Rightarrow$ mayor C,
Mayor $\varepsilon \Rightarrow$ mayor C.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Recordemos el concepto de potencial



$$W = \int_A^B dW = -q\int_A^B \vec{E}\bullet d\vec{l} = q\underbrace{\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{l}}_{V_{BA}}$$

$$V_B - V_A = \frac{W}{q} = \int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{l}$$

Notar que si A esta en el infinito y lo tomamos como referencia $V_A = 0$

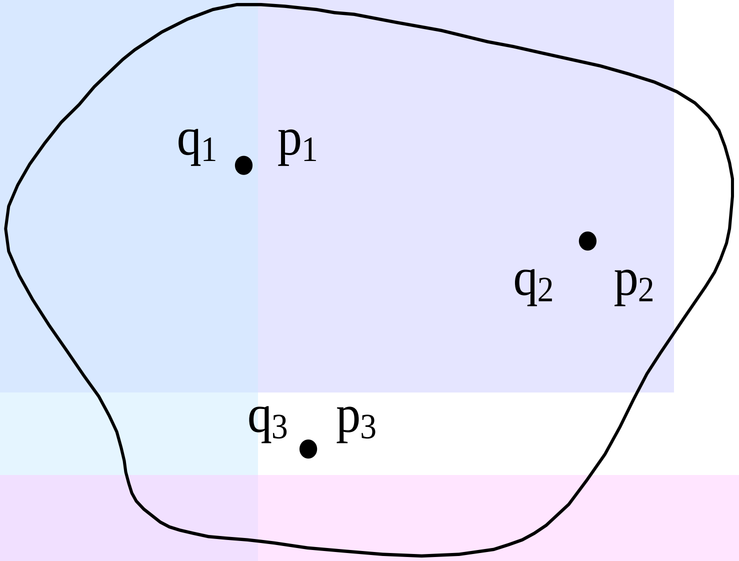
$$\boxed{W = qV_B}$$

Es el trabajo para traer la carga q desde el infinito al punto B.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

La energía electrostática de un sistema de partículas es el trabajo necesario para formar dicho sistema ⇒ *W=U*.

Caso sistema de 3 cargas



Recordar que:

- El campo es conservativo
- Campos cumplen con superposición

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la primera carga no es necesario realizar trabajo

$$W_1 = 0$$

$q_1 \bullet p_1$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para la Segunda carga

$$W_2 = q_2 V_{21}$$

q_1 • p_1

• q_2 p_2

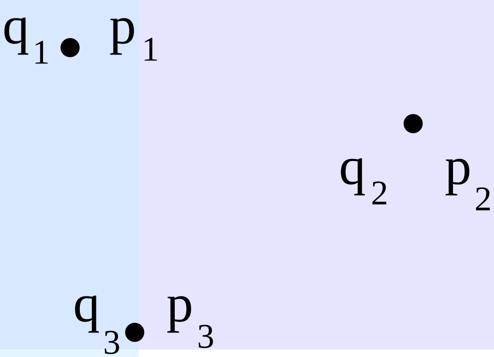
V_{21} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_2

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

Para traer la 3ª carga

$$W_3 = q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$



V_{31} es el potencial producido por la carga 1 en la posición P_3

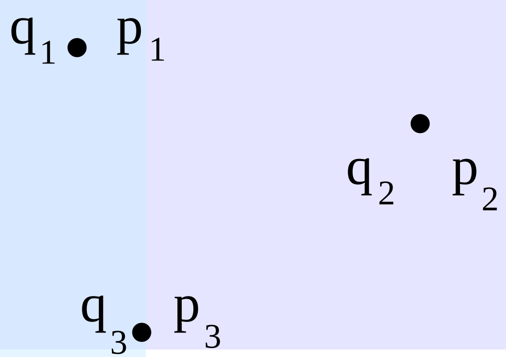
V_{32} es el potencial producido por la carga 2 en la posición P_3

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito

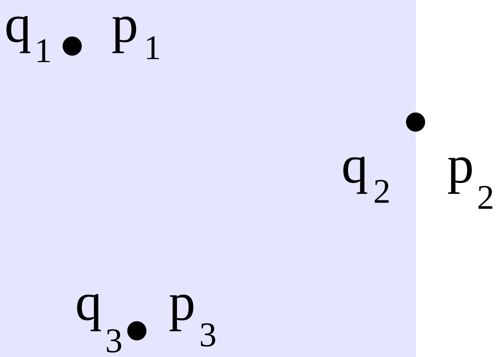
Luego el trabajo total es

$$W = 0 + W_2 + W_3 = q_2 V_{21} + q_3 V_{31} + q_3 V_{32}$$



ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Traemos una por una las cargas desde el infinito



Si invertimos el orden, primero traemos la carga 3, luego la 2 y finalmente la 1 se tiene:

$$W' = \underbrace{0}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 3}}} + \underbrace{q_2 V_{23}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 2}}} + \underbrace{q_1 V_{13} + q_1 V_{12}}_{\substack{\text{Trabajo}\\ \text{carga 1}}}$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

$$W = q_2V_{21} + q_3V_{31} + q_3V_{32}$$ y $$W' = 0 + q_2V_{23} + q_1V_{13} + q_1V_{12}$$

Trabajo es el mismo independiente del orden, luego

$$W' = W$$

q_1 p_1 q_2 p_2 q_3 p_3

Sumando

$$\Rightarrow 2W = q_1\underbrace{(V_{13} + V_{12})}_{potencial\ en\ 1} + q_2\underbrace{(V_{21} + V_{23})}_{potencial\ en\ 2} + q_3\underbrace{(V_{31} + V_{32})}_{potencial\ en\ 3}$$

$$W = \frac{1}{2}(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3)$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para un sistema de n cargas se obtiene

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k V_k$$ en [J] joules

para distribuciones continuas de carga se tiene
$\Sigma \rightarrow \int$ y $q \rightarrow dq$, con ello

$$W = \frac{1}{2}\int V(\vec{r})\,dq$$ en [J] joules

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Para una distribución específica de carga tendremos

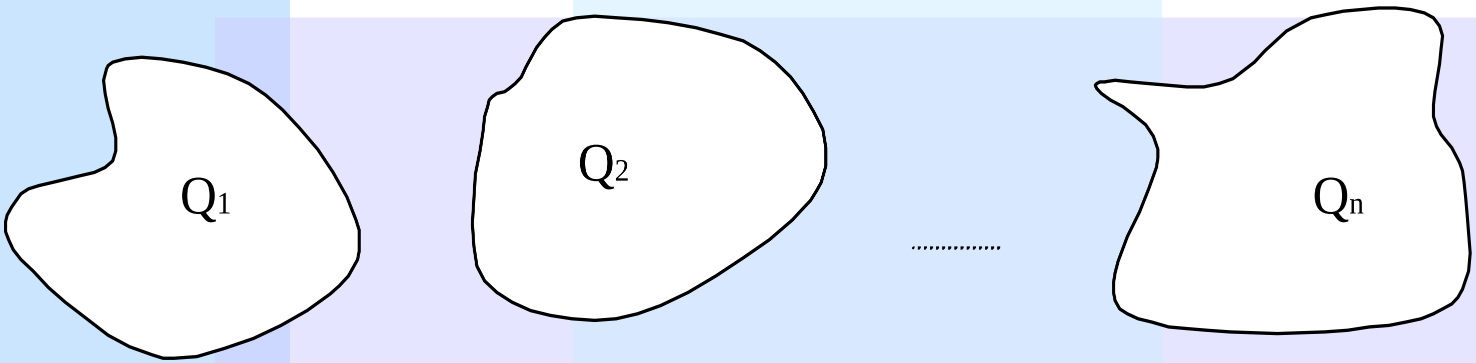
$$W = \frac{1}{2}\int \lambda(\vec{r})V(\vec{r})dr$$

$$W = \frac{1}{2}\iint \sigma(\vec{r})V(\vec{r})dS$$

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv$$

Energía de un Sistema de Conductores

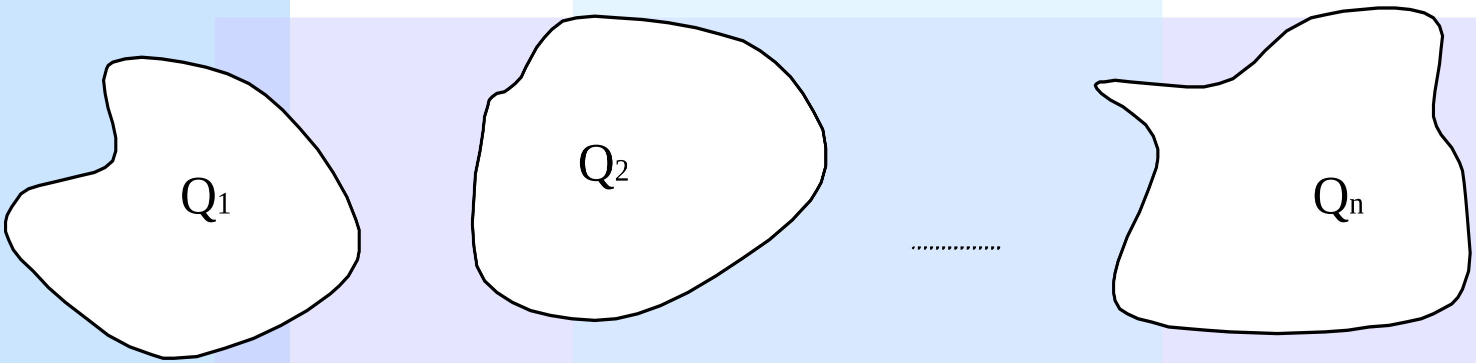
Consideremos n conductores cargados



¿Cuánta energía se gastó en formar este sistema?

Energía de un Sistema de Conductores

Solo hay carga en las superficies

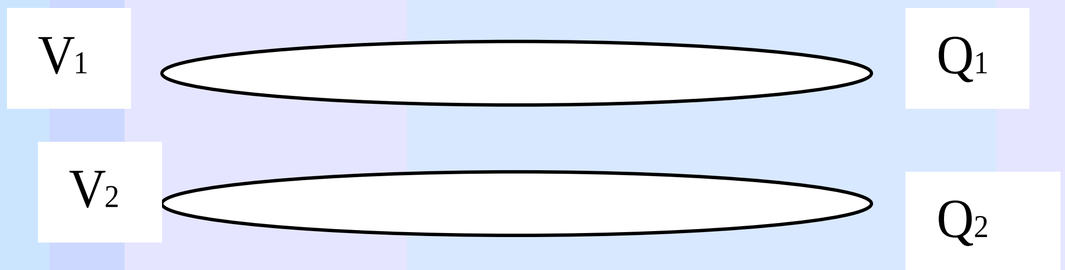


$$W = \frac{1}{2} V_1 \underbrace{\iint_{S_1} \sigma_1(\vec{r})\,dS}_{Q_1} + \frac{1}{2} V_2 \underbrace{\iint_{S_2} \sigma_2(\vec{r})\,dS}_{Q_2} + \ldots + \frac{1}{2} V_n \underbrace{\iint_{S_n} \sigma_n(\vec{r})\,dS}_{Q_n}$$

$$\boxed{\therefore W = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i}$$

Caso condensadores

Cada condensador tiene igual carga y de signo contrario



$$W = \frac{1}{2}\sum V_i Q_i \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}(V_1Q_1 + V_2Q_2) \Rightarrow \quad Q_2 = -Q_1 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)Q_1$$

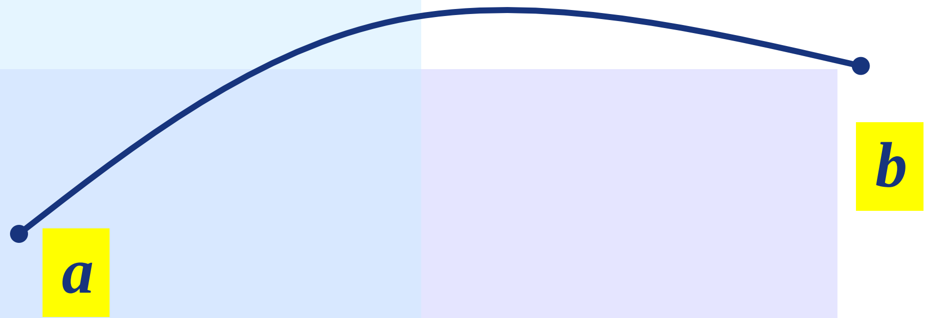
pero $Q = CV$ $\quad \Rightarrow W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ **ó** $W = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$

Fuerza Eléctrica y Energía

Trabajo entre dos puntos

$$\vec{F} = -\nabla W$$

$$F \Delta x = -\Delta W$$

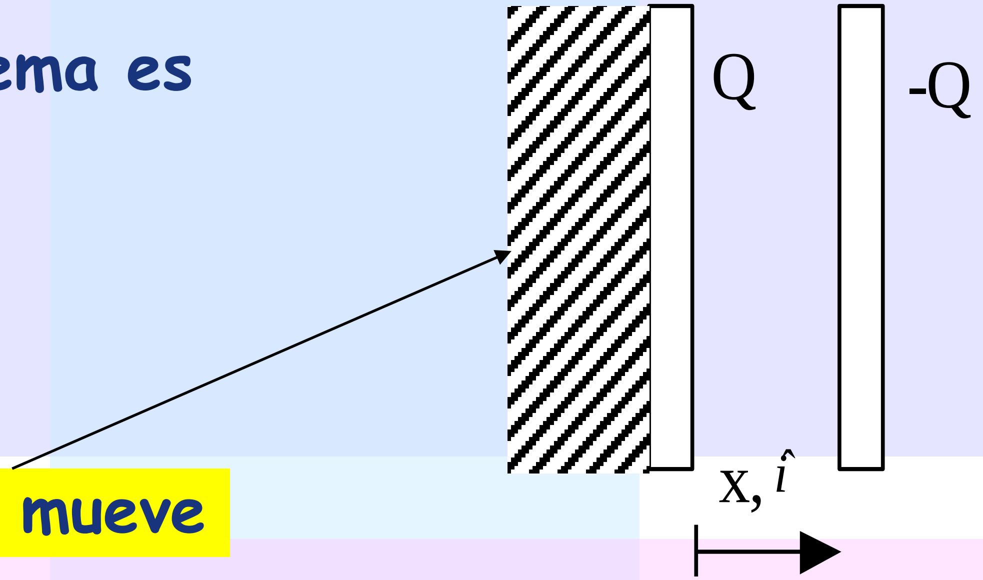


Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas

La energía del sistema es

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$



Al producirse el movimiento de atracción, la carga neta se mantiene constante (Q=constante)

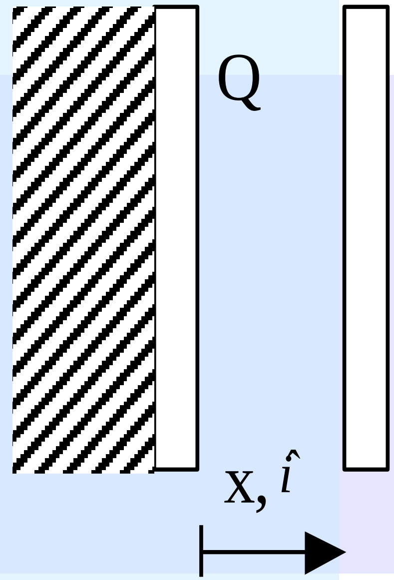
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

La capacidad es función de la distancia x

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x}$$



$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}x$$

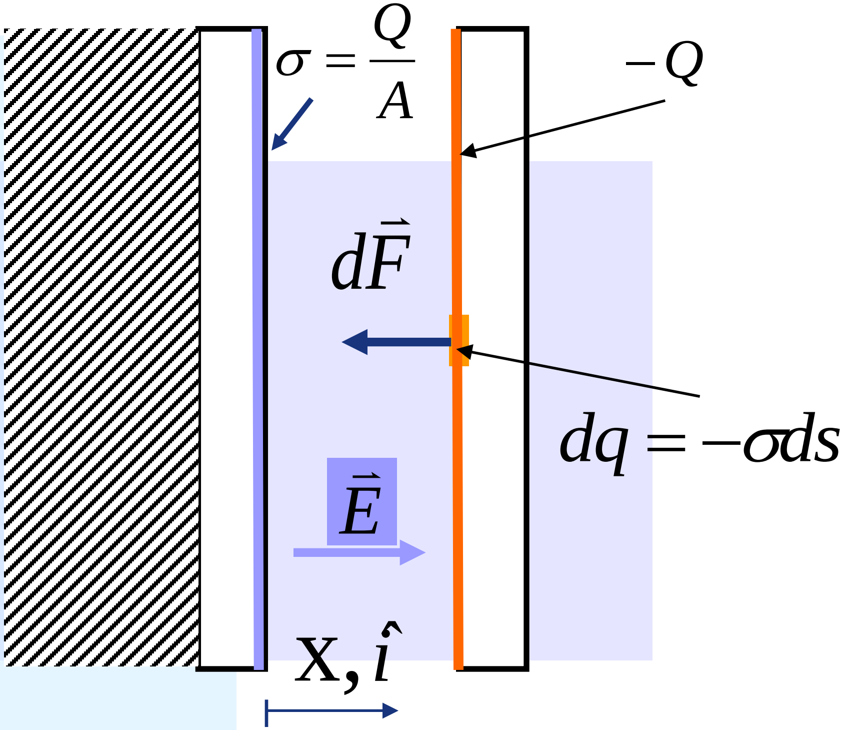
$$\vec{F} = -\frac{\partial W}{\partial x}\hat{i} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

Fuerza es independiente de la distancia x

Fuerza Eléctrica y Energía

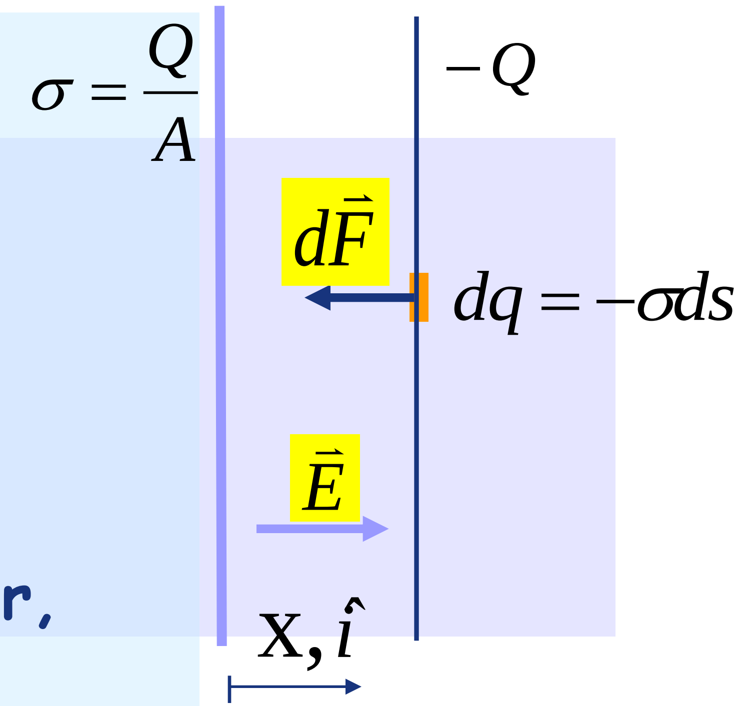
Método alternativo

Fuerza producida por el campo de una placa sobre las cargas de la otra



Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo



Fuerza sobre elemento dq de otra placa con -Q

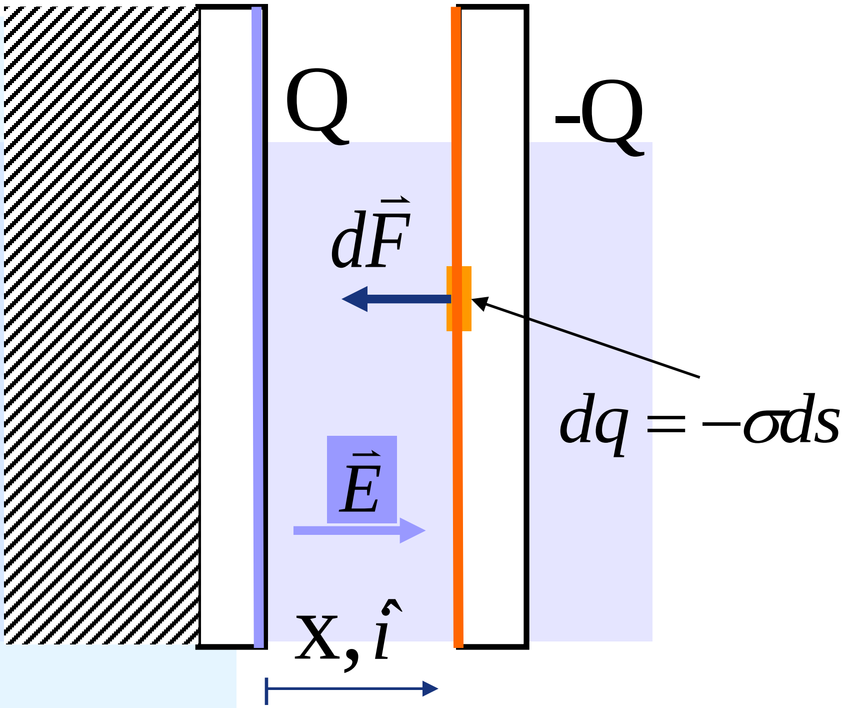
$$d\vec{F} = \vec{E}\, dq$$

Notar que este campo es sólo el producido por el plano Q, es decir,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

Campo producido por placa con Q en la posición de la placa con carga -Q

Fuerza Eléctrica y Energía



Fuerza producida por campo entre las placas

$$d\vec{F} = \vec{E}dq \qquad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i}\,\sigma\,ds = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}A\hat{i} \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{(\sigma A)^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}$$

$$\boxed{\therefore \vec{F} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\hat{i}}$$

Fuerza es independiente de la distancia x

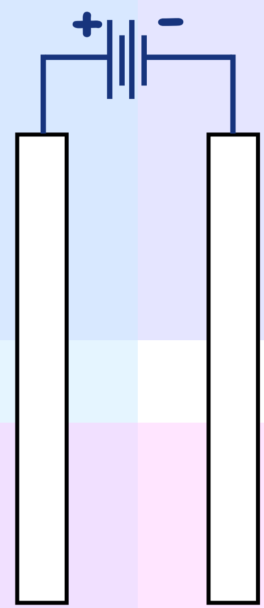
Fuerza electromotriz

¿Existen dispositivos capaces de mantener una diferencia de potencial entre dos conductores?

Si

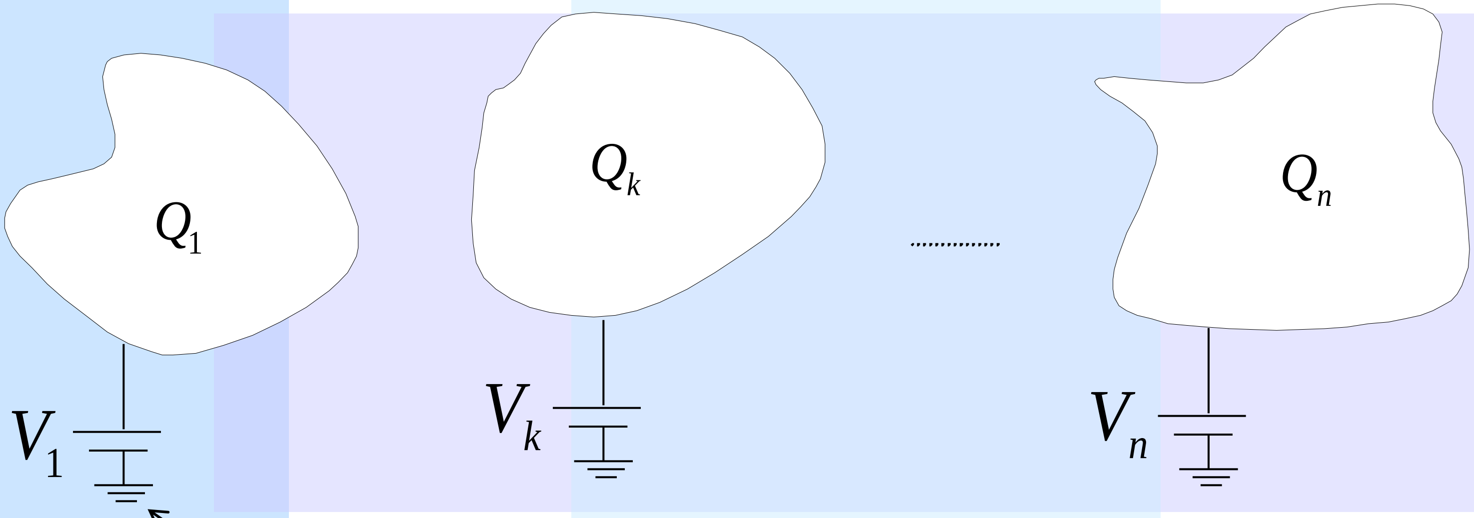
Esto se logra mediante una fem o batería, la cual es un dispositivo que tiene la capacidad para mantener la diferencia de potencial constante entre sus bornes

$$V_Q - V_{-Q} = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$



Energía con Fuentes de Voltaje Constante

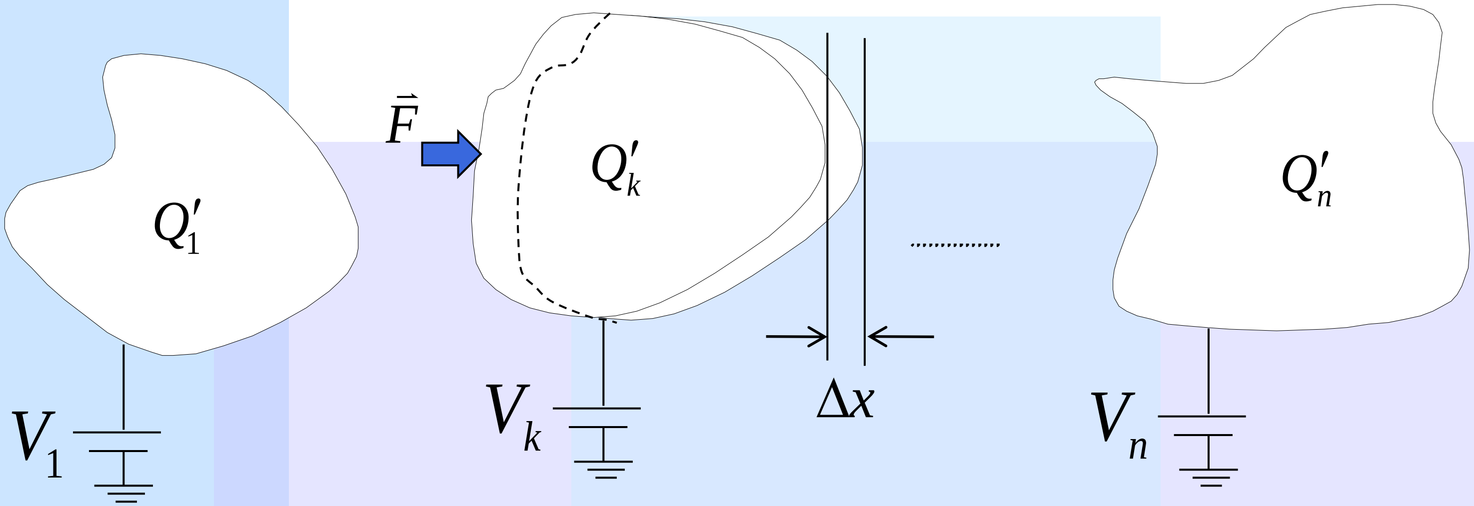
Consideremos n conductores con potencial constante



Indica voltaje cero

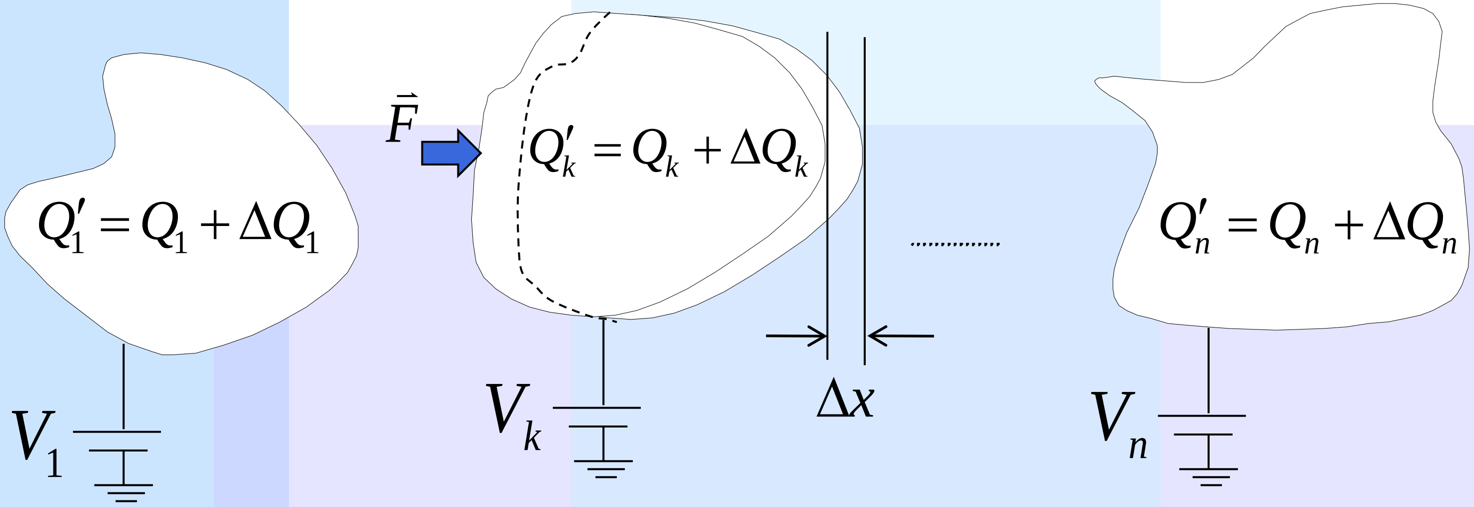
El potencial de cada conductor está fijo mediante fuentes de voltaje (fuerza electromotríz fem)

Energía con Fuentes de Voltaje Constante



- Supondremos que el conductor k experimenta un desplazamiento virtual Δx
- Se produce una variación en todas las cargas

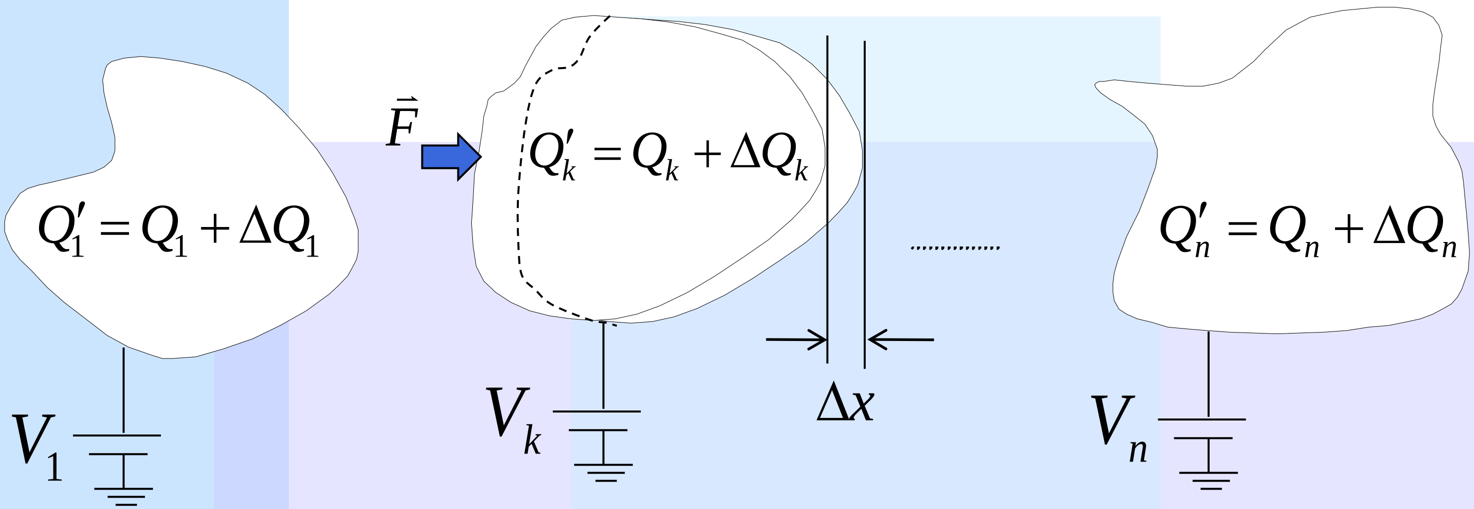
Energía con Fuentes de Voltaje Constante



• La variación en las cargas $\Delta Q_i = Q_i - Q_i'$ es suministrada por cada fuente de voltaje (fem)

•Notar que esto se hace para mantener constante el potencial en cada conductor

Energía con Fuentes de Voltaje Constante



- El trabajo realizado por cada fem es $\Delta W_i = V_i \Delta Q_i$
- El trabajo realizado por la fuerza externa es $\Delta W_e = F \Delta x$

Luego el cambio de energía electrostática del sistema es $\Delta U = \Delta W_e + \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$

Energía de un Sistema de Conductores

En este caso, el cambio en la energía electrostática del sistema es igual al trabajo mecánico de desplazamiento más la energía proporcionada por las fuentes que mantienen el potencial constante en cada conductor (fem).

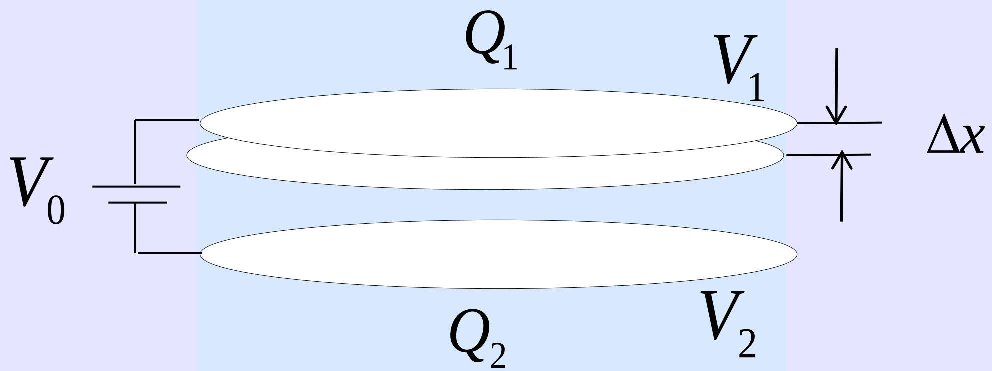
$$\Delta U = \Delta W_e + \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$$

Notar que $\Delta U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i \Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i = \Delta W_e + \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i$

$$\Rightarrow \Delta W_e = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i \Rightarrow F \Delta x = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i$$

Caso Condensadores a Potencial Constante

Condensador se mantiene a una misma diferencia de potencial



$$\Delta W = -\frac{1}{2}\sum V_i \Delta Q_i \quad \Rightarrow \quad \Delta W = -\frac{1}{2}(V_1\Delta Q_1 + V_2 \Delta Q_2) \Rightarrow$$

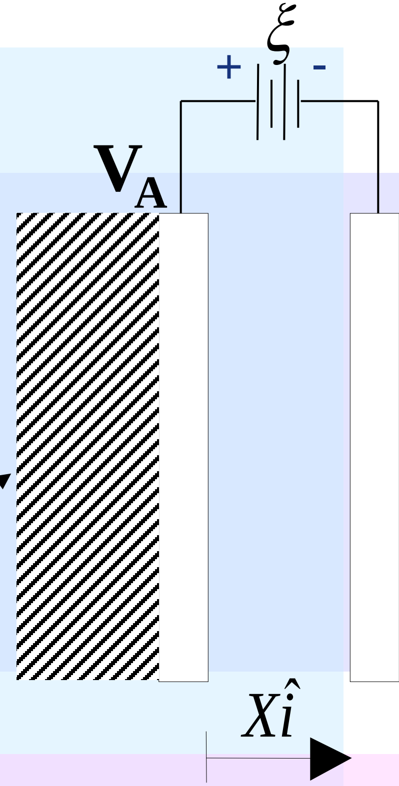
$$\Delta Q_2 = -\Delta Q_1 = -\Delta Q \Rightarrow \Delta W = -\frac{1}{2}\overbrace{(V_1 - V_2)}^{V_0}\Delta Q \qquad \Delta W = -\frac{1}{2}V_0 \Delta Q$$

pero $\Delta Q = \Delta C V_0 \qquad \Rightarrow \Delta W = -\frac{1}{2}V_0^2 \Delta C$

Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo: Condensador de placas planas con diferencia de potencial constante

$$\vec{F} = \nabla W$$



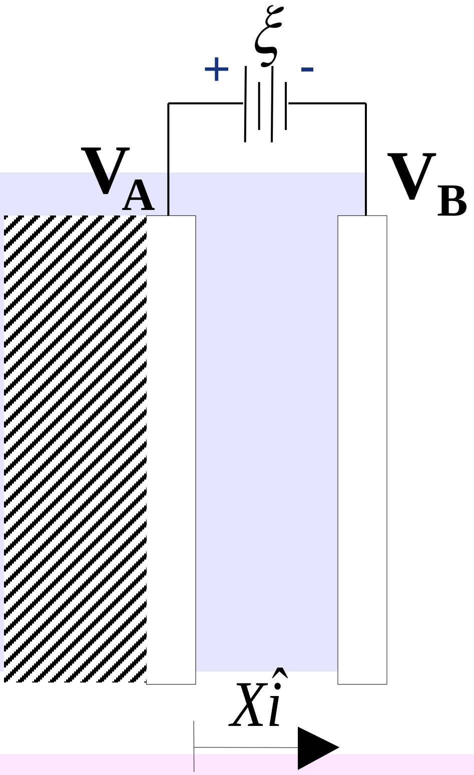
No se mueve

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Al producirse el movimiento de atracción, la diferencia de potencial se mantiene constante ($\Delta V = V_A - V_B = \xi$ constante)

Fuerza Eléctrica y Energía

$$W = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$



La capacidad es función de la distancia x

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x} \quad \Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{x} \xi^2$$

$$\vec{F} = \frac{\partial W}{\partial x} \hat{i} = -\frac{\varepsilon_0 A \xi^2}{2x^2} \hat{i}$$

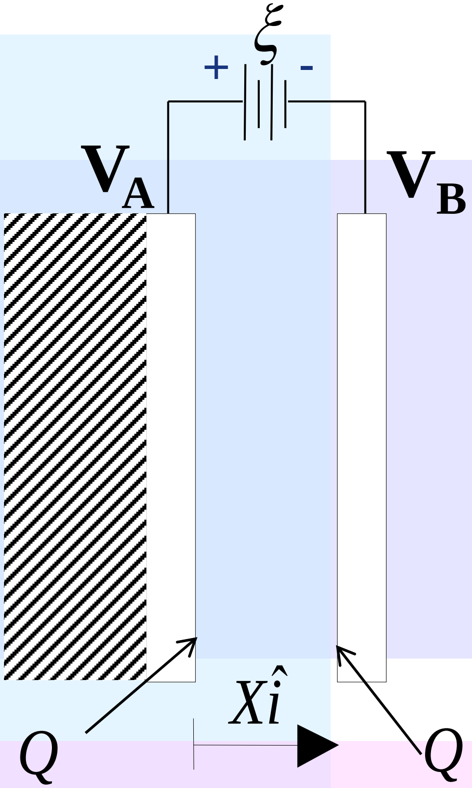
Fuerza es dependiente de la distancia x

Fuerza Eléctrica y Energía

Método alternativo

Campo producido por placa con Q en la posición de la placa con carga -Q

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{Q}{2A\varepsilon_0}\hat{i}$$



$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{x} \Rightarrow Q = \varepsilon_0 \frac{A}{x}\xi$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{x}\xi$$

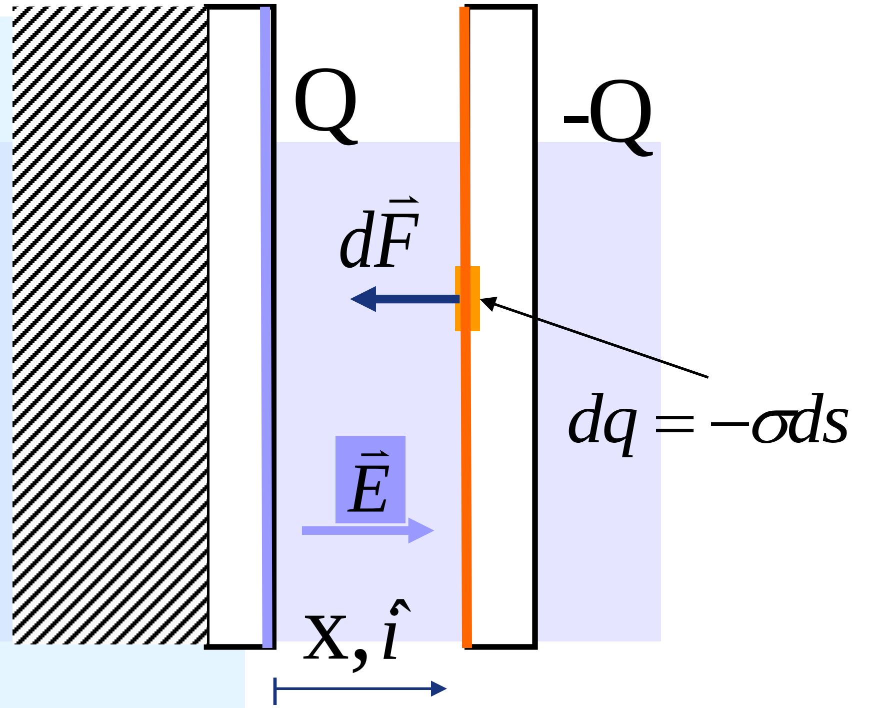
$$\Rightarrow \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{A}{x}\xi \frac{1}{2A\varepsilon_0}\hat{i} = \frac{\xi}{2x}\hat{i}$$

Fuerza Eléctrica y Energía

Fuerza producida por placa con Q sobre placa con carga -Q

$$d\vec{F} = \vec{E}dq$$

$$\vec{E} = \frac{\xi}{2x}\hat{i}$$



$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\iint_A \frac{\xi}{2x}\hat{i}\,\frac{\varepsilon_0\xi}{x}ds = -\iint_A \frac{\varepsilon_0\xi^2}{2x^2}ds\,\hat{i} \quad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 A\xi^2}{2x^2}\hat{i}$$

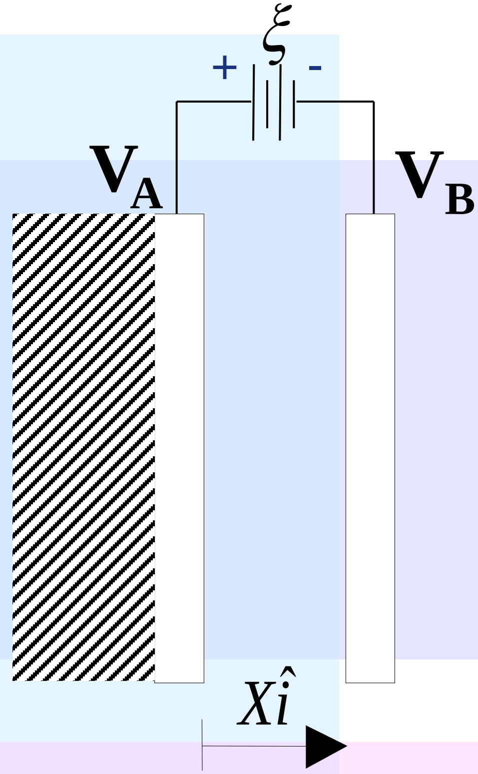
Fuerza es dependiente de la distancia x y tiende a juntar las placas

Fuerza Eléctrica y Energía

$$Q = \varepsilon_0 \frac{A}{x} \zeta$$

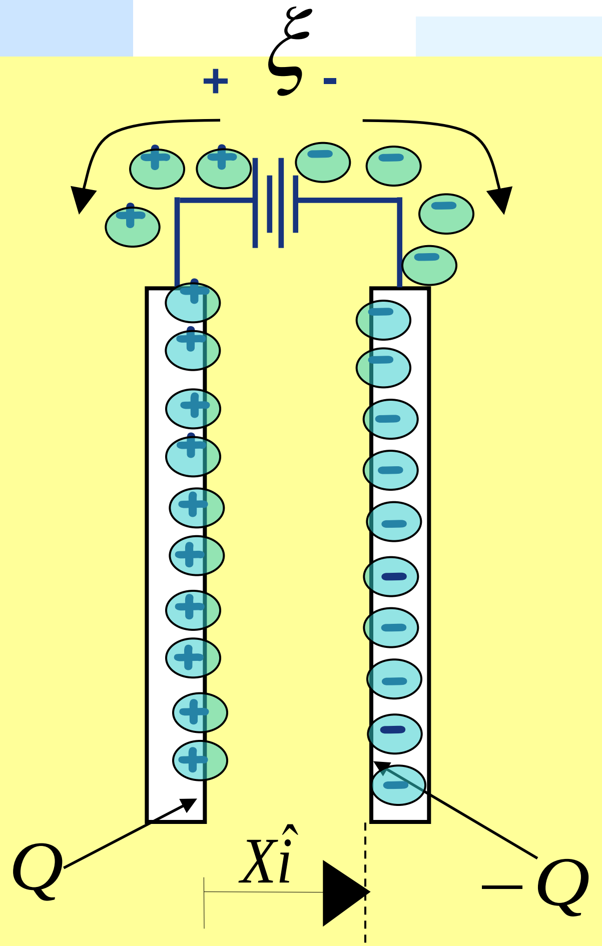
$$\vec{E} = \frac{\xi}{2x} \hat{i}$$

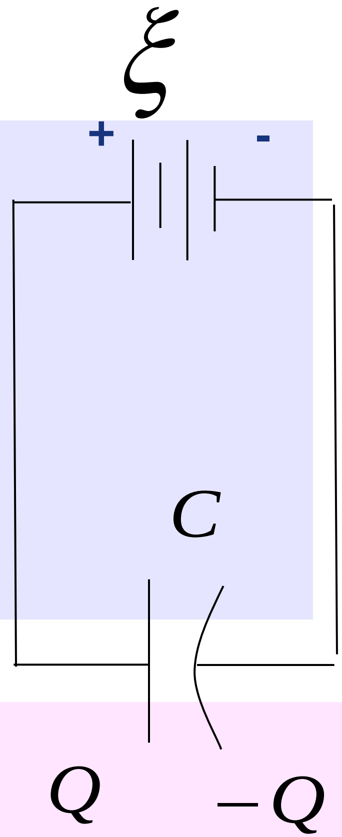
$$\vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 A \xi^2}{2x^2} \hat{i}$$



Al acercarse las placas la carga aumenta y, por lo tanto, aumenta la fuerza de atracción.

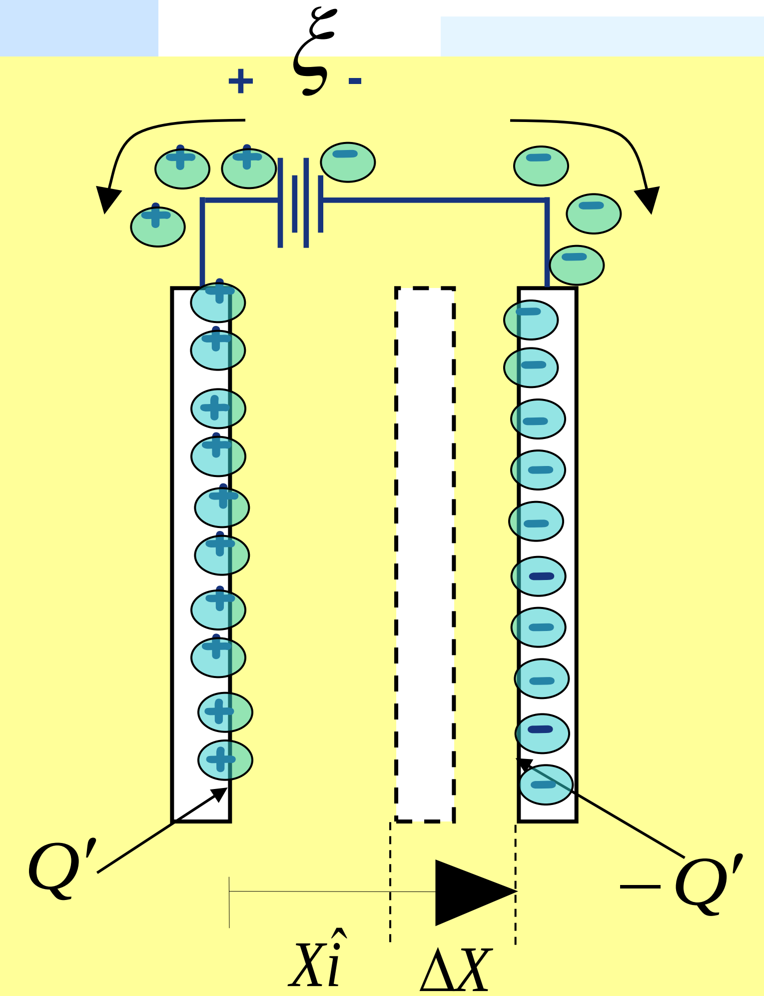
Fuerza electromotriz

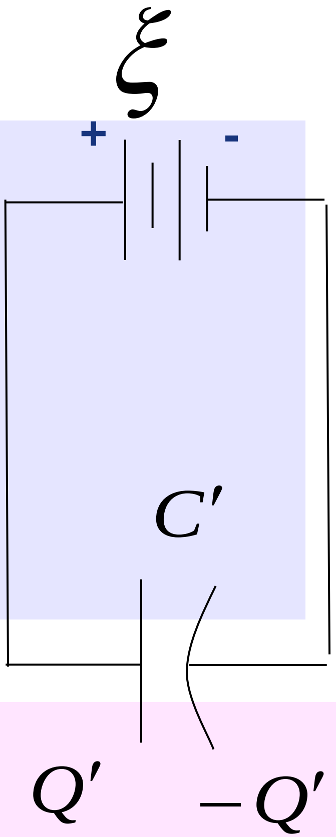




La Fuerza Electromotríz (fem) ξ se encarga de mantener constante la diferencia de potencial

Fuerza electromotriz





Notar que la carga cambia. La suministra la fem