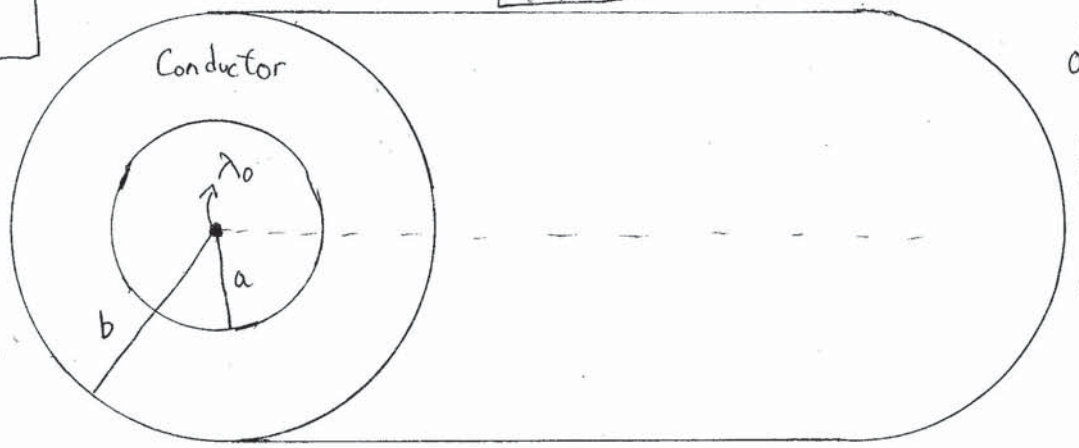
P1

Aux 6



a) ¿σ y ρ en conductor?

b) Si $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ en $r < a$, repetir a)

c) ¿ σ_P y ρ_P para b)?

Sol: a) Consideremos una superficie Gaussiana cilíndrica de radio $r \in (a,b)$, y altura h, al aplicar Gauss:

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Manto}} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Tapas}} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

Por la simetría del problema suponemos $\vec{D} = \vec{D}(r)\cdot\hat{r} \Rightarrow \vec{D}\cdot d\vec{S} = 0$ en las tapas

$\Rightarrow$ (*) $Q_{enc} = \iint_{\text{Manto}} \vec{D}\cdot d\vec{S}$, pero además sabemos que dentro del conductor

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \iint_{\text{Manto}} \cancel{\vec{D}}\cdot d\vec{S} = 0 = Q_{enc}$$

Sabemos que Q_{enc} abarca a la carga de la línea de longitud h, $\lambda_0 \cdot h$, la cual no es nula. Por lo tanto aparece una densidad superficial de carga en la cara interna del conductor, σ_{int}, ie, tenemos el caso de un conductor con oquedad con una carga en su interior. Luego σ_{int} es tal que:

$$Q_{enc} = 0 \Rightarrow Q_{enc} = \lambda_0 \cdot h + \int_0^h \int_0^{2\pi} \sigma_{int}(\vec{r}) \cdot a\,d\theta\,dz$$ pues cara interna $\Rightarrow r = a$

Por la simetría del problema, y como $\lambda_0 = cte$, suponemos $\sigma_{int} = cte$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \lambda_0 h + 2\pi h\,\sigma_{int}\cdot a \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{int} = \frac{-\lambda_0}{2\pi a}}$$

P1 Aux6 1/1

Nota: en un conductor nunca hay carga en volumen (en equilibrio) $\Rightarrow \boxed{\rho = 0}$
$\Rightarrow$ Solo aparece carga superficial

Por otro lado como el conductor estaba inicialmente descargado, su carga neta es nula $\Rightarrow$ Aparece una densidad de carga superficial en la cara externa σ_{ext} tq: $Q_{neta\ conductor} = 0$, ie:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^h \sigma_{ext}(\vec{r})\cdot b\, d\theta\, dz + \int_0^{2\pi}\int_0^h \sigma_{int}\, a\, d\theta\, dz = 0$$

Nuevamente podemos suponer $\sigma_{ext} = cte \Rightarrow 2\pi h \sigma_{ext}\cdot b + 2\pi h \sigma_{int}\, a = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ext} = -\frac{\sigma_{int}\cdot a}{b} = \frac{\lambda_0}{2\pi b}}$$

b) Por (*) teníamos que: $\iint_{Manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{enc}$, la diferencia es que acá

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow Q_{enc} = \iint_{Manto} \frac{\overset{0}{\cancel{\vec{E}}}}{\varepsilon}\cdot d\vec{S} = 0$$

Pues se sigue cumpliendo que $\vec{E} = 0$ dentro del conductor.

$\therefore$ Se llega a los mismos resultados anteriores.

c) En este caso $r < a$, luego aplicando Gauss: (*) $\Rightarrow \iint_{Manto} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \lambda_0\cdot h$

$$\Rightarrow \lambda_0\cdot h = \int_0^{2\pi}\int_0^h D(r)\, r\, dz\, d\theta = 2\pi h r D(r) \Rightarrow \underline{\vec{D}(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi r}\hat{r}}$$

Como estamos en el dieléctrico, sabemos que: $\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

$$\Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \vec{D} - \frac{\varepsilon_0\vec{D}}{\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\vec{D} = \underline{\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{\lambda_0}{2\pi r}\hat{r} = \vec{P}}$$

Luego calculamos σ_p en la interfaz dieléctrico conductor como:

$\sigma_p(r=a) = \vec{P}(r=a)\cdot\hat{n}$, en este caso el vector normal es: $\hat{n} = \hat{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_p(r=a) = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)\lambda_0}{2\pi\varepsilon a}}$$

. Calculamos $\rho_p(\vec{r}) \equiv \nabla\cdot\vec{P}(\vec{r})$, $\vec{P} = P(r)\hat{r}$

$$\Rightarrow \rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot\vec{P})}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon}\lambda_0\right)}_{cte} = \boxed{0 = \rho_p}$$