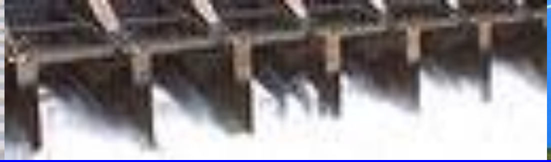


FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 7
Medios Materiales II

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

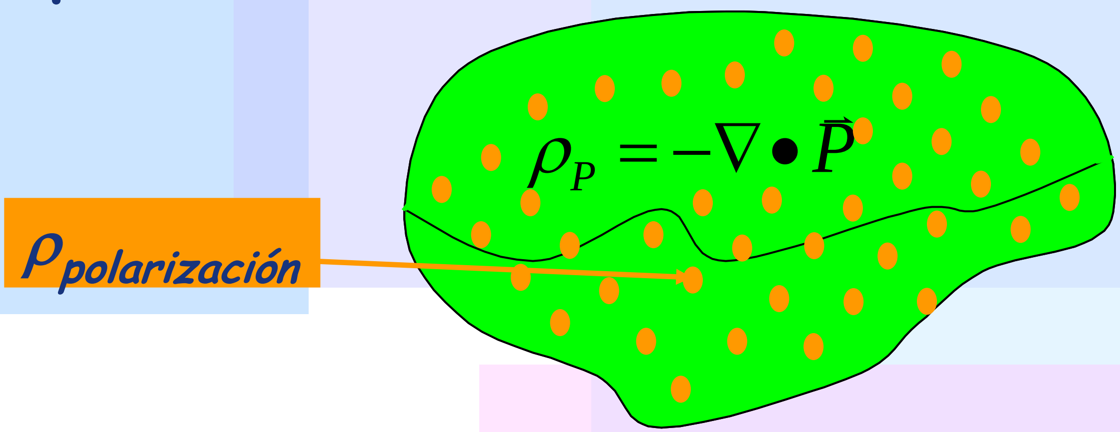
- Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell
- Constante dieléctrica
- Clasificación de materiales dieléctricos
- Ruptura dieléctrica
- Condiciones de borde
- Refracción del campo eléctrico
- Consideraciones sobre Simetría

Marc Chagal (1887- 1985)
El violinista azul

Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$

ρ_{total} corresponde a la carga total que es fuente de campo eléctrico



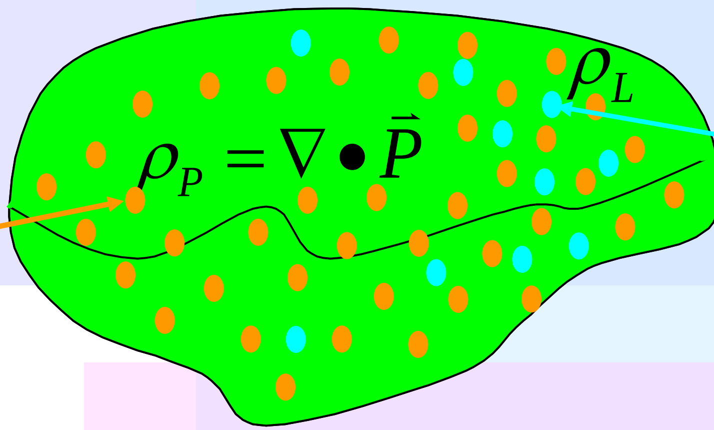
En el caso más general ρ_{total} estará compuesta de carga libre y carga de polarización

$$\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$$

Generalización de la 1ª Ecuación de Maxwell

La 1ª ecuación de Maxwell indica $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$

$$\rho_{total} = \rho_L + \rho_P \Rightarrow \rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E}$$



$\rho_{polarización}$

ρ_{libre}

(Puesta a propósito)

Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} - \rho_P$$ **pero** $$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

$$\rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

$$\rho_L = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (2.19)$$

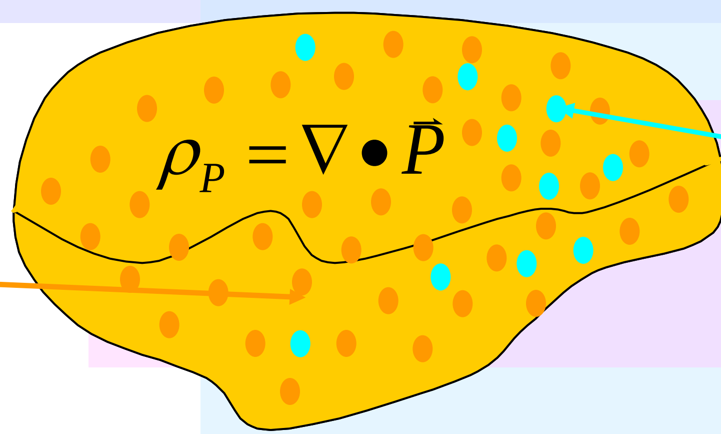
definiendo $\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

Vector de desplazamiento

$$\boxed{\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}}$$

1ª ecuación de Maxwell

$\rho_{polarización}$



ρ_{libre}

(Puesta a propósito)

Generalización de la 1ª ecuación de Maxwell

$$\rho_L = \nabla \cdot \vec{D}$$ **1ª ecuación de Maxwell**

donde $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ Vector de desplazamiento

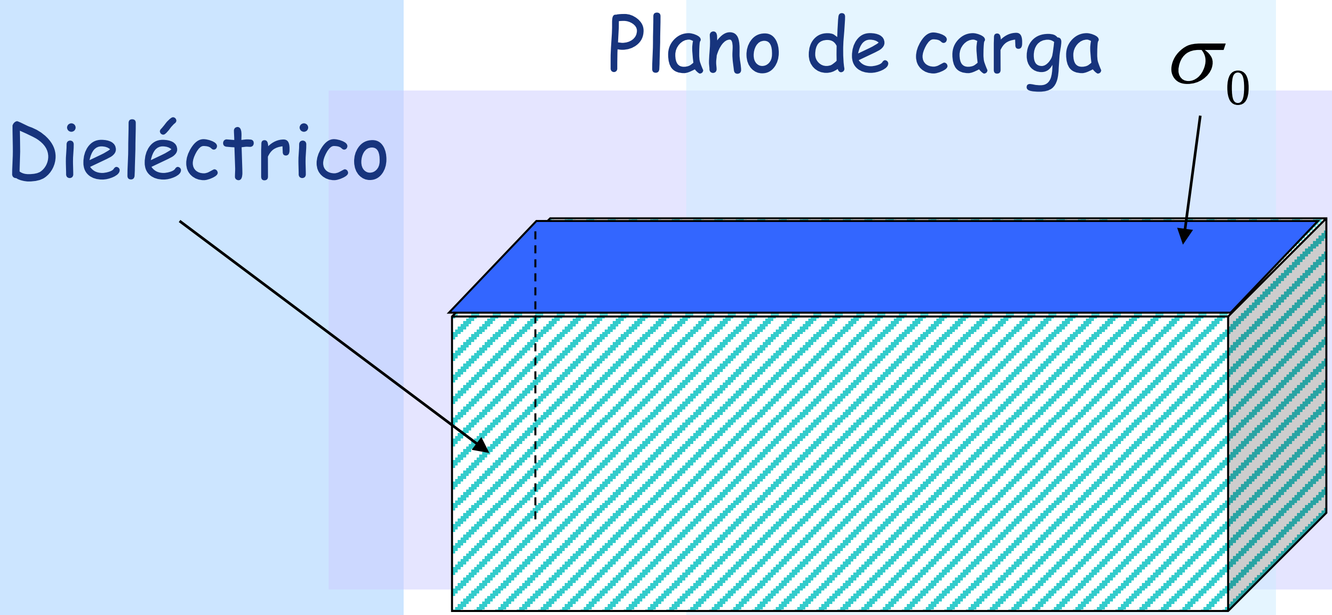
Fuentes de D son sólo las cargas libres

Integrando en un volumen Ω

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L dv}_{Q_L} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{D} dv}_{\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}} \Rightarrow Q_L = \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}$$

Ley de Gauss en la materia

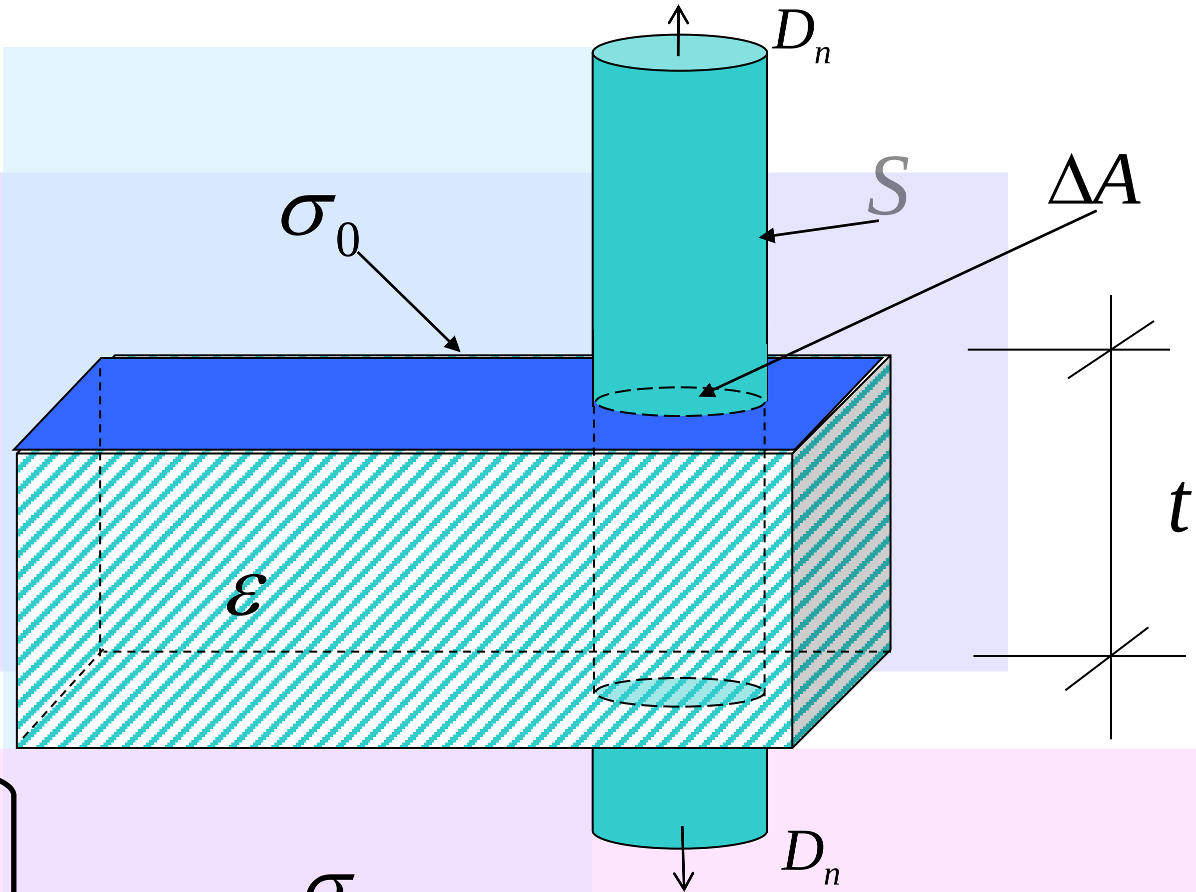
Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico



Calcular campos si la relación entre campos eléctricos y de desplazamiento es lineal, es decir, se cumple $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Plano de carga
(infinito)



$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_T$$

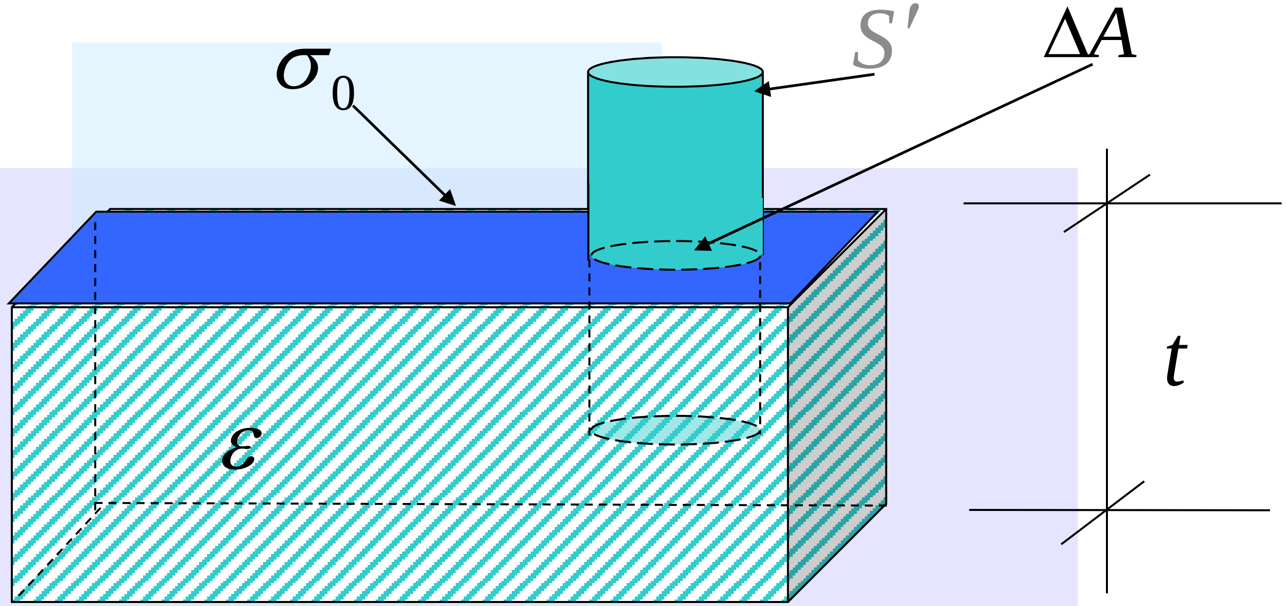
$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$

$$D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico



$$\oint\!\!\oint_{S'} \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q_T$$

$$Q_T = \Delta A \sigma_0$$

$$\oint\!\!\oint_{S'} \vec{D}\bullet d\vec{s} = 2\Delta A D_n$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{\sigma_0}{2}$$

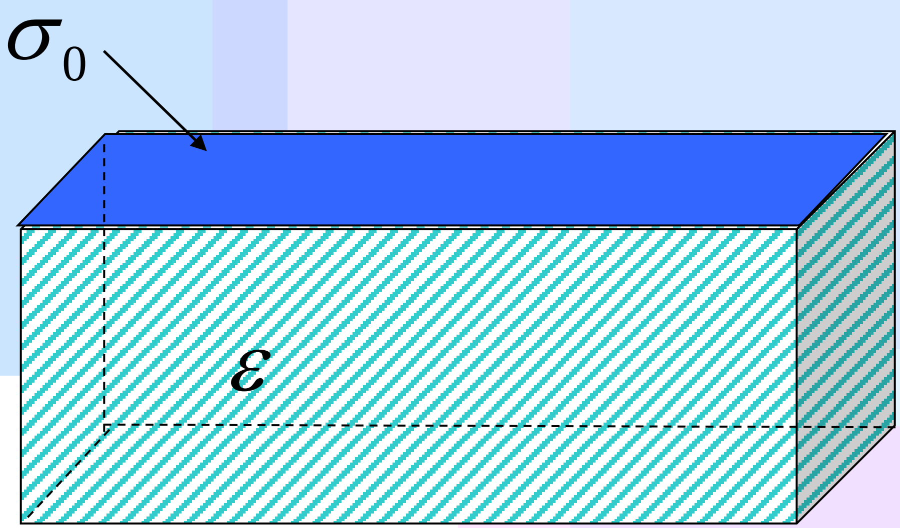
$$\vec{D} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{2}\hat{k} & si \quad z > 0 \\ -\dfrac{\sigma_0}{2}\hat{k} & si \quad z < 0 \end{cases}$$

Fuentes de D son sólo cargas libres

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$$



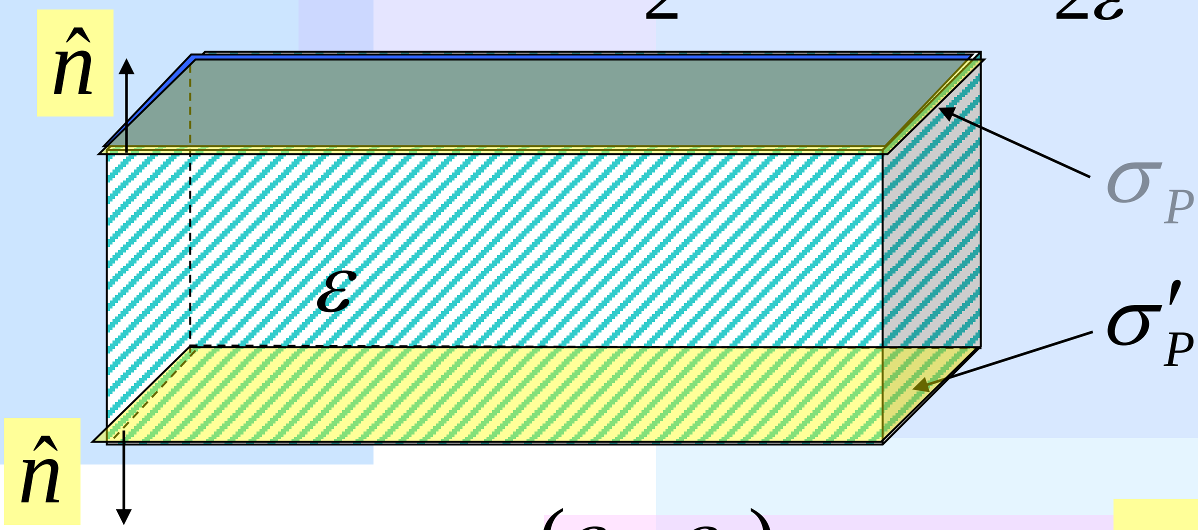
$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0 \hat{k}$$

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

Al interior del medio material

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\hat{k} \Rightarrow \vec{P} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0\hat{k}$$



Hay cargas de polarización

$$\sigma_P = \vec{P}\bullet\hat{n} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0\hat{k}\bullet\hat{k} \Rightarrow \sigma_P = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0$$

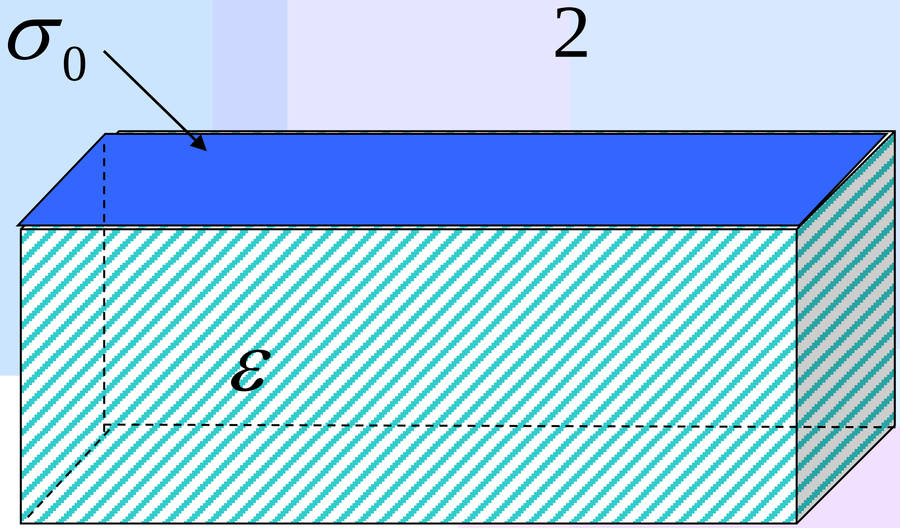
$$\sigma'_P = \vec{P}\bullet\hat{n} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0\hat{k}\bullet-\hat{k} \Rightarrow \sigma'_P = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0$$

Ejemplo: Plano de carga con dieléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}, \quad \vec{P} = 0$$

Zona 1



$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\hat{k}$$

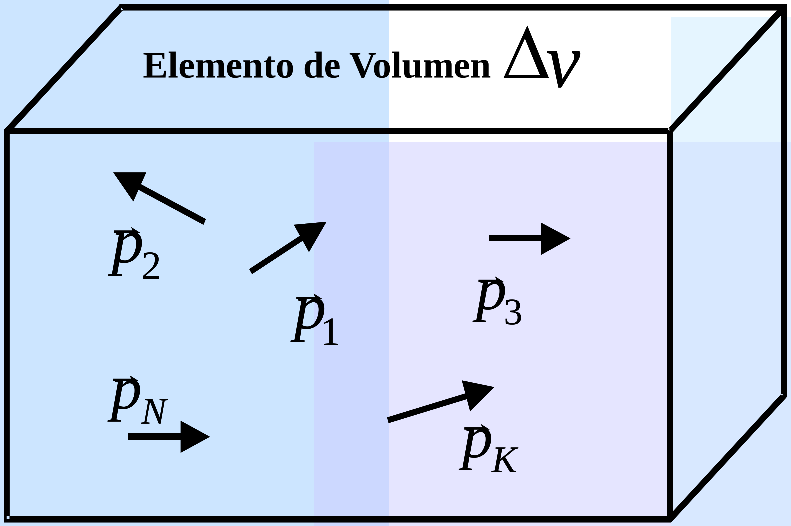
$$\vec{P} = -\frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon}\sigma_0 \hat{k}$$

Zona 2

$$\vec{D} = -\frac{\sigma_0}{2}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\hat{k}, \quad \vec{P} = 0$$

Zona 3

Polarización de medios materiales



$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \longrightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \to 0} \left[\frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

Se encuentra experimentalmente que la polarización en medios materiales varia con la intensidad del campo eléctrico aplicado $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material

Constante dieléctrica

Teniamos que $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pero $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 (I + \chi_e) \vec{E}$$

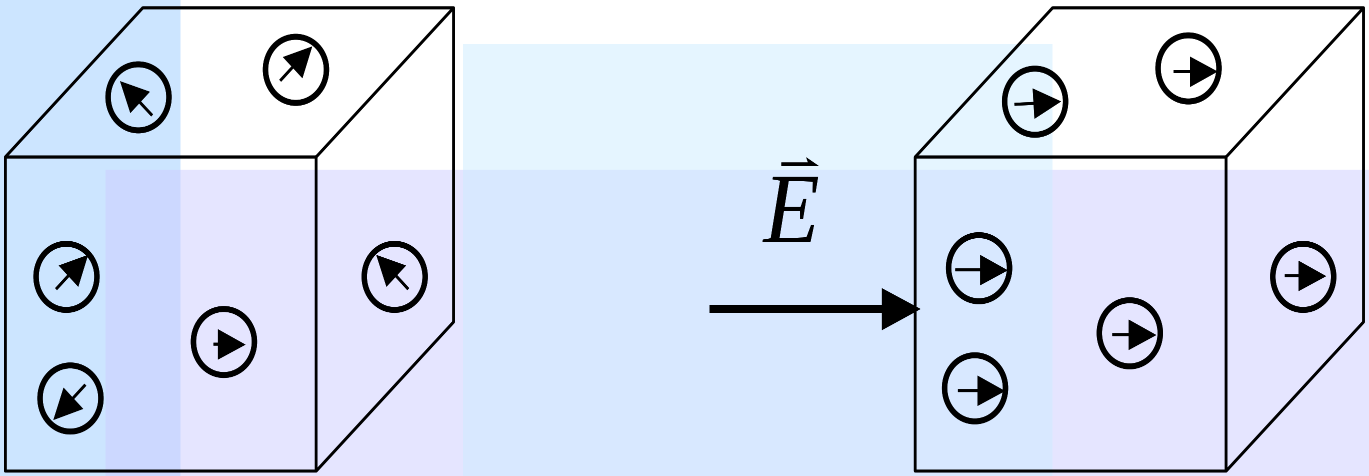
Se define

$\varepsilon_r = (I + \chi_e)$ Permeabilidad dieléctrica relativa

$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ Constante dieléctrica del material

$$\Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Clasificación de materiales dieléctricos



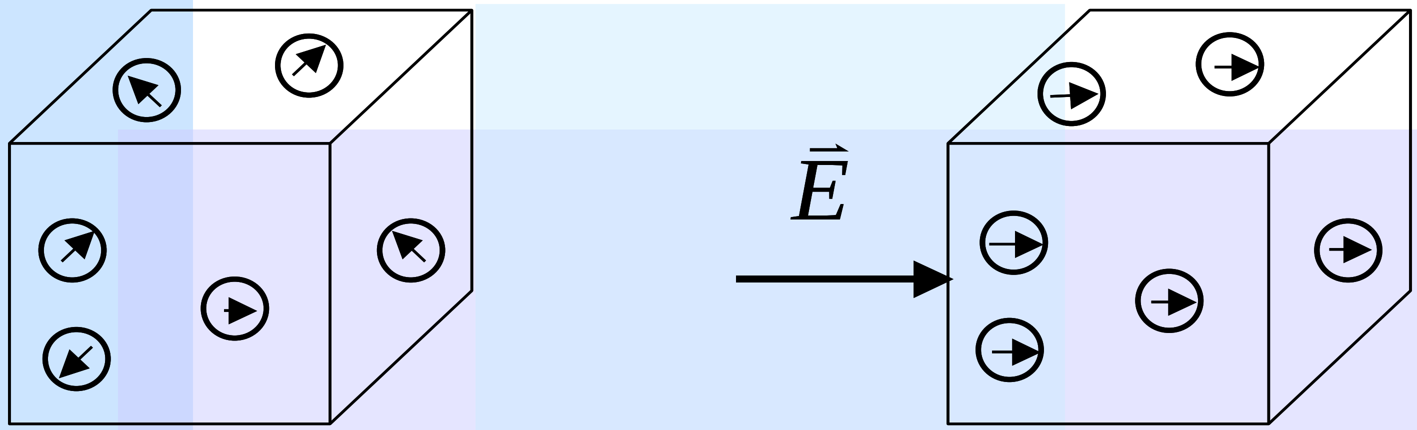
Situación sin campo aplicado

Situación con campo aplicado

i) Material lineal, isótropo y homogéneo

$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ son paralelos, ε es constante

Clasificación de materiales dieléctricos



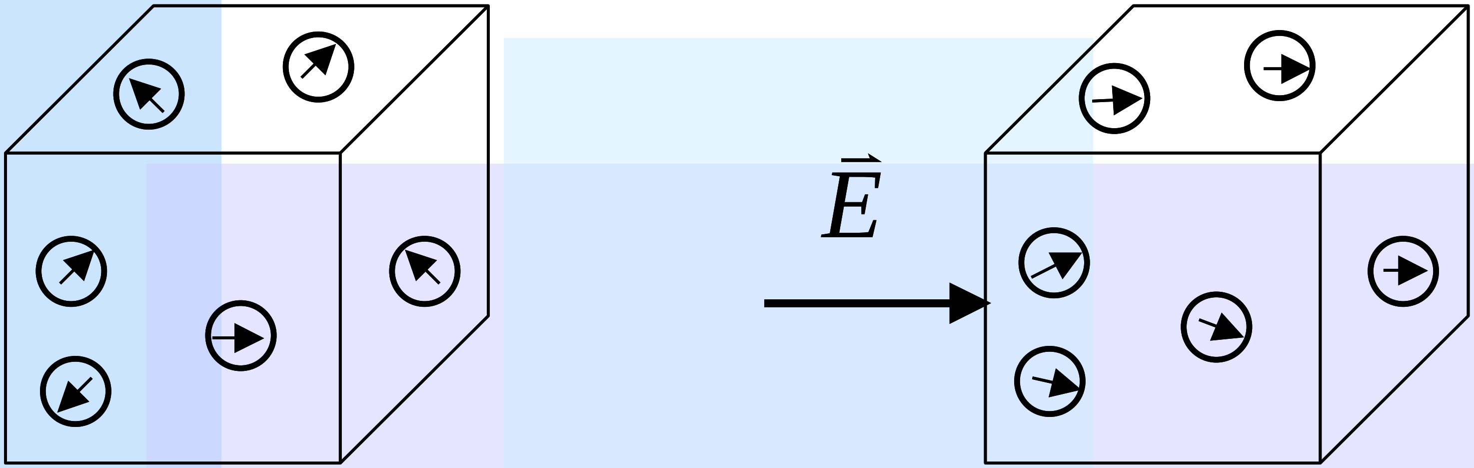
Situación sin campo aplicado

Situación con campo aplicado

ii) Material lineal, isótropo y no homogéneo

$\left\|\vec{P}\right\| = \alpha \left\|\vec{E}\right\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ son paralelos, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ no es constante

Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado

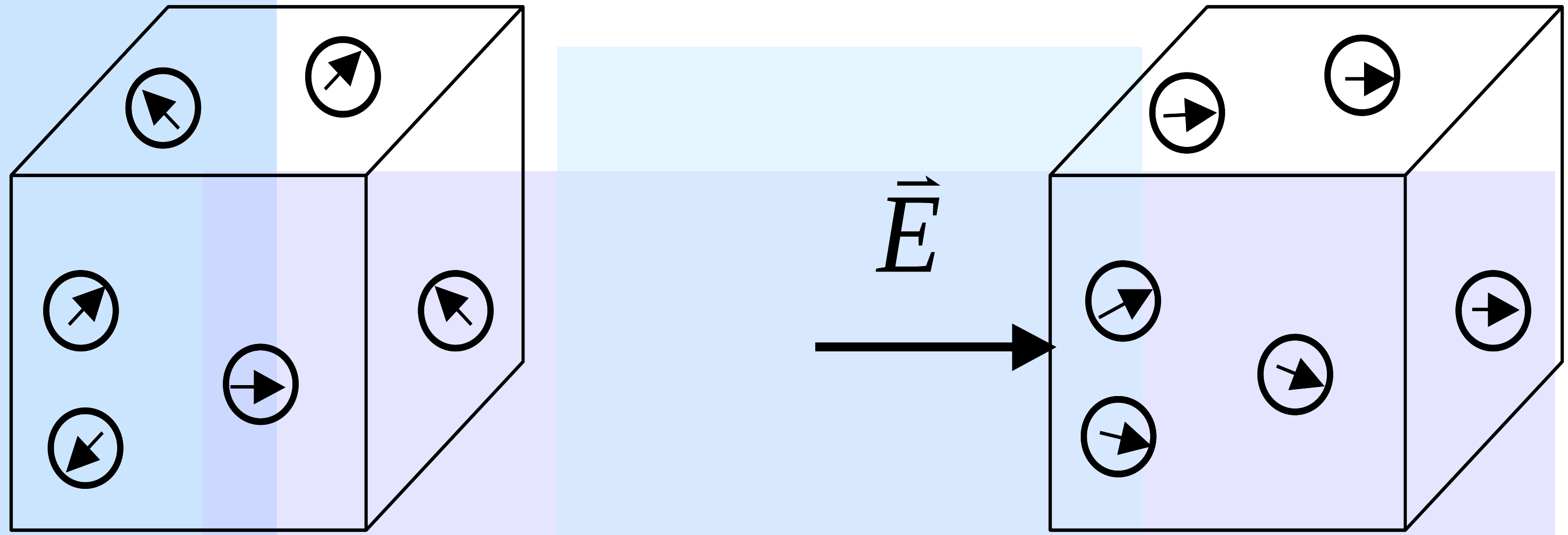
Situación con campo aplicado

iii) Material lineal, anisótropo y no homogéneo

$\|\vec{P}\| = \alpha \|\vec{E}\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ No son paralelos.

$\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{i\,j}(\vec{r})$

Clasificación de materiales dieléctricos



Situación sin campo aplicado

Situación con campo aplicado

iv) Material no lineal, anisótropo y no homogéneo

$\left\|\vec{P}\right\| \neq \alpha \left\|\vec{E}\right\|$ y $\vec{D}, \vec{P}$ y $\vec{E}$ No son paralelos, $\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{r})$

Polarización de medios materiales

$\left\|\vec{P}\right\| = \alpha \left\|\vec{E}\right\| \Rightarrow$ Materiales lineales

$\vec{P} = \alpha(\vec{r})\vec{E} \Rightarrow$ Materiales isótropos $\vec{P} // \vec{E}$

Si α es constante $\Rightarrow$ Material homogéneo

En general tendremos $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

χ_e es la susceptibilidad eléctrica de un material

Constante dieléctrica

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, la expresión más general es

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

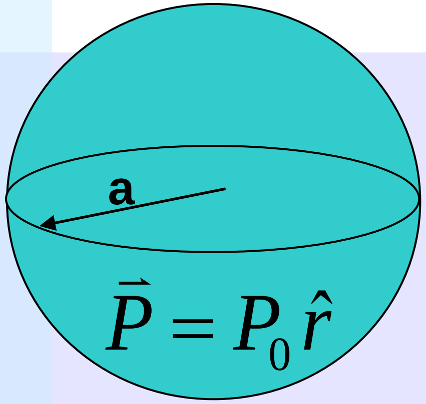
y $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\vec{r})$

Ejemplo

Se tiene esfera dieléctrica con

$$\vec{P} = P_0\,\hat{r}$$

Calcular $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ y cargas de polarización

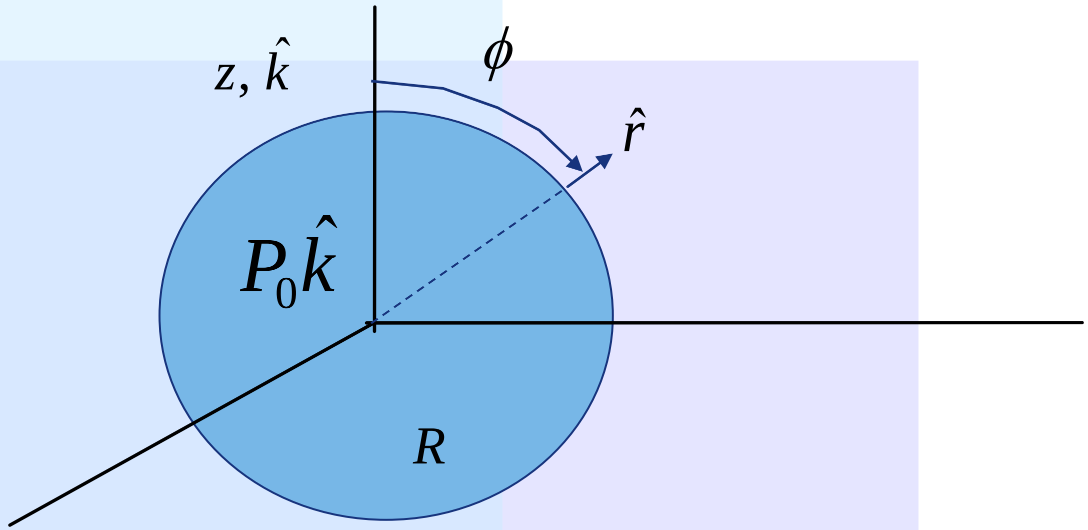


Ejemplo

Cargas de polarización.

$$\sigma_P = \vec{P} \bullet \hat{n} = P_0 \hat{k} \bullet \hat{r}$$

$$\sigma_P = P_0 \cos\phi$$



$$\rho_P = -\nabla \bullet \vec{P}$$

$$\nabla \bullet \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 P_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta P_\theta)}{\partial\theta}$$

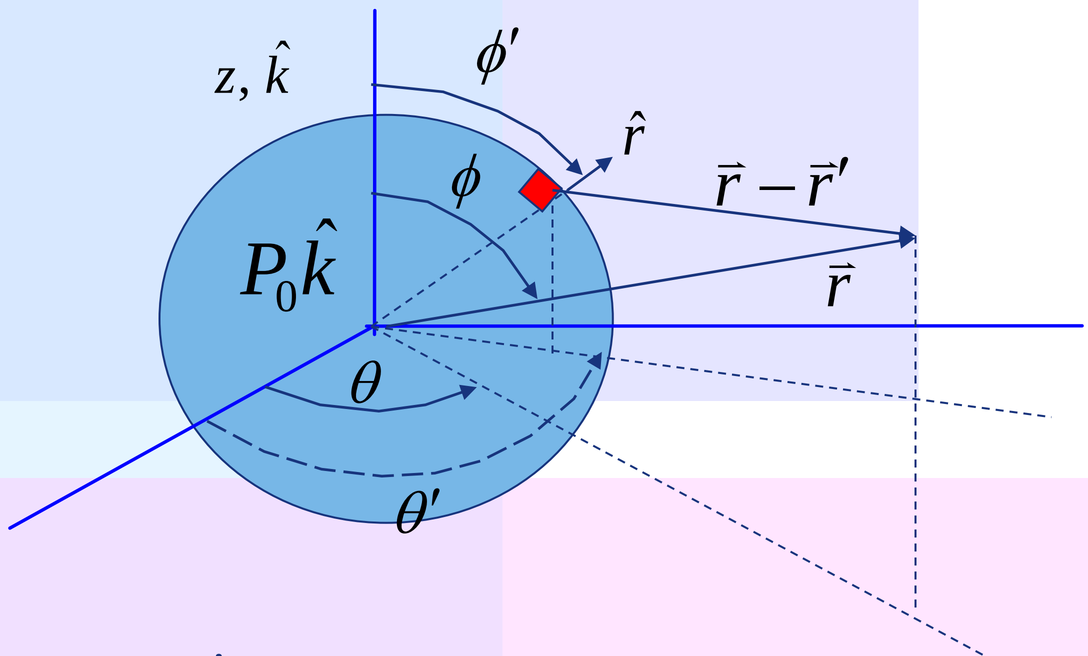
Ejemplo

Encontrar el potencial en todo el espacio,.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{dq'}{\| \vec{r}-\vec{r}'\|}$$

$$\sigma_P = P_0 \cos\phi'$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma_P R \sin\phi' \, d\theta' \, d\phi'}{\| \vec{r}-\vec{r}'\|}$$



Luego hacemos la parte en volumen, sacamos la integral y OK.

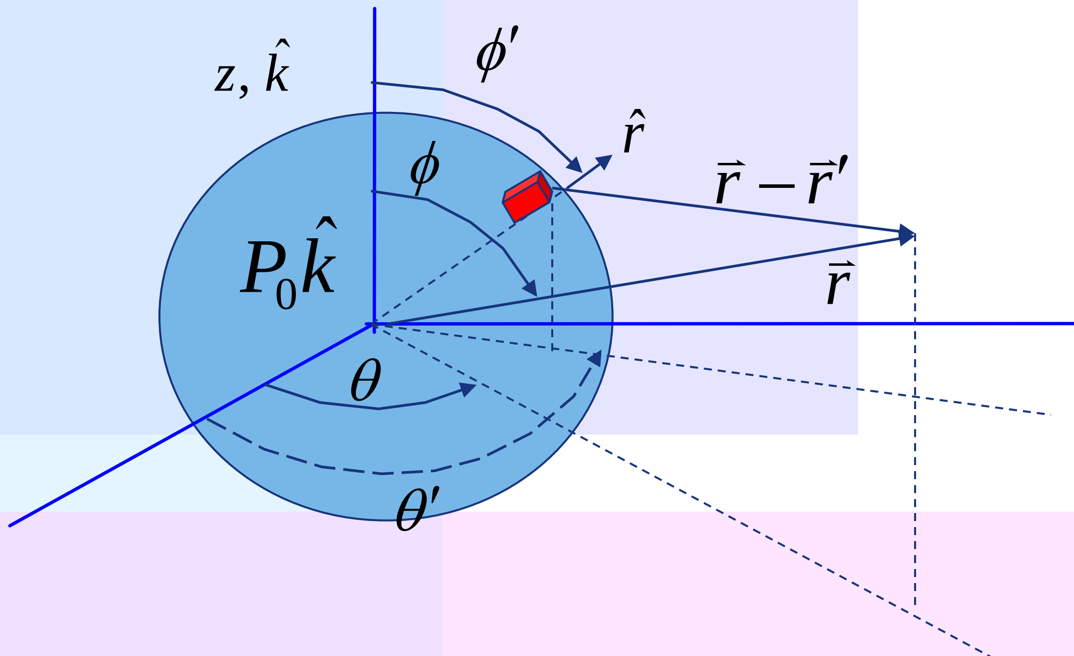
Ejemplo: Camino alternativo

El potencial de un material con polarización $\vec{P}$ es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \bullet (\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dv'$$

Como $\vec{P} = \vec{P}_0 \hat{k}$ es constante podemos escribir

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dv' \right)$$



Por otra parte, el campo de una distribución de carga en volumen es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} dv'$$

Comparando estas dos expresiones, concluimos que la integral del lado derecho del potencial es exactamente el valor del campo que produce una carga uniforme de valor $\rho(\vec{r}) = 1$. Calculemos este campo:

Ejemplo

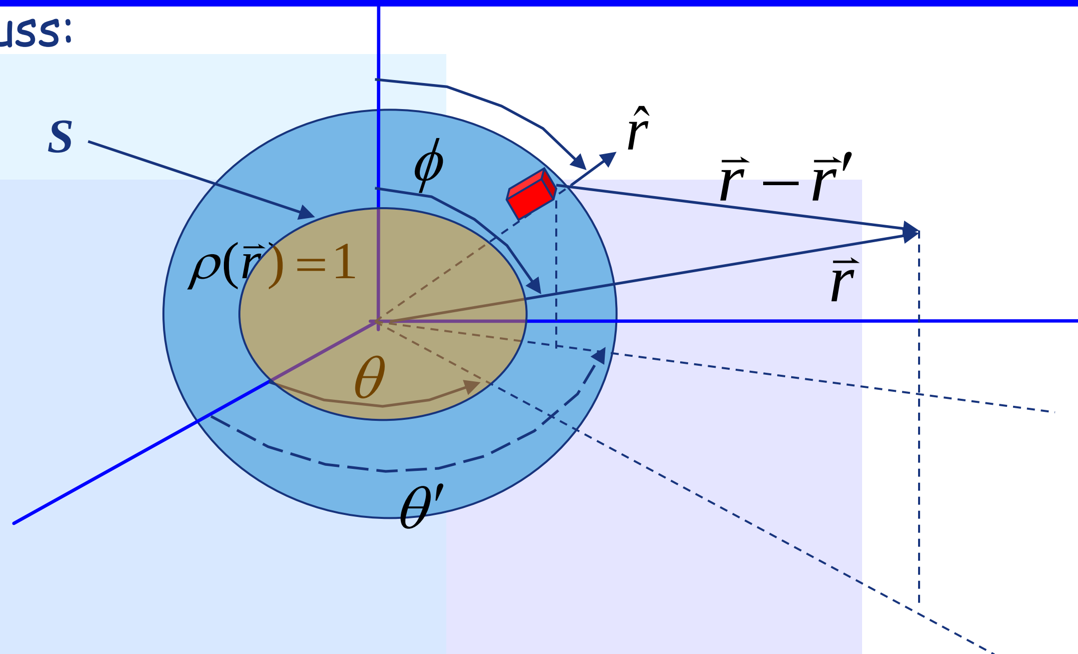
Calculemos este campo usando Gauss:

I) r<R:

$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \times 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{r}}$$



II) r<R:

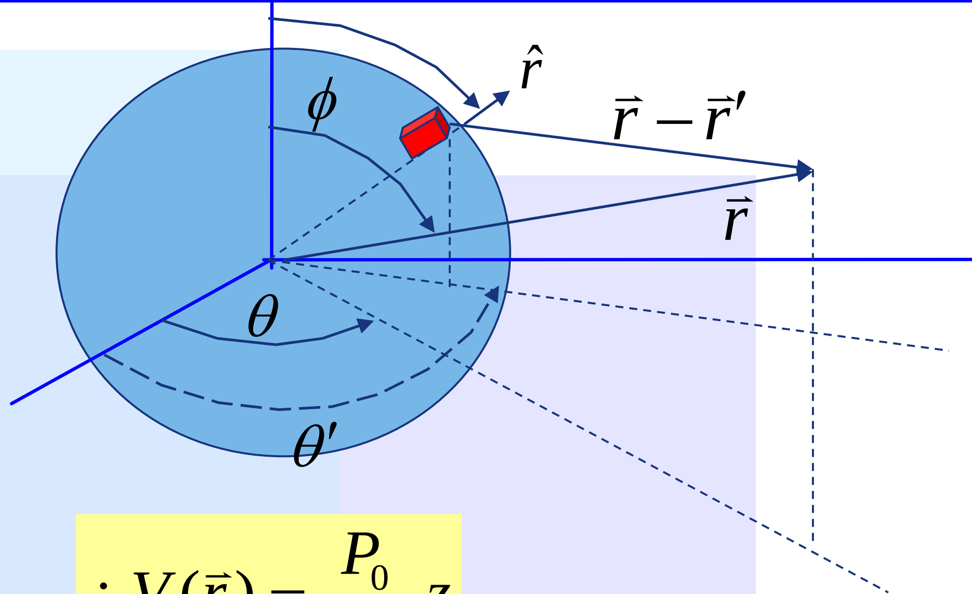
$$\oiint_{S_1} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \times 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}}$$

Ejemplo

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\Omega \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3} dv' \right)$$



Luego el potencial vale:

I) r<R:

$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = P_0 \hat{k} \bullet \frac{1}{3\varepsilon_0} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\boxed{\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0}{3\varepsilon_0} z}$$

II) r<R:

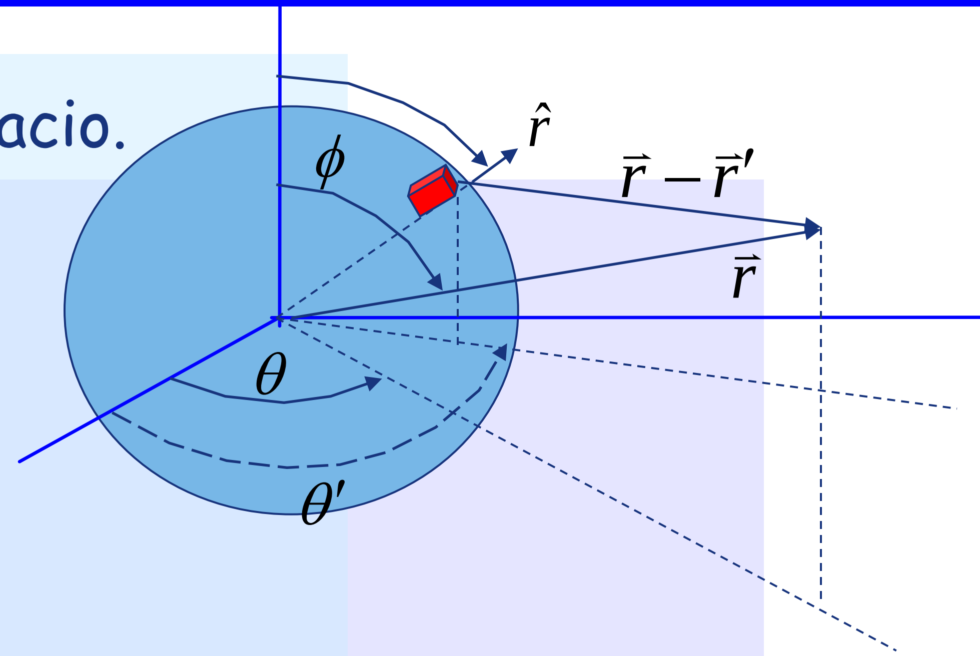
$$V(\vec{r}) = \vec{P} \bullet \left(\frac{R^3}{3\varepsilon_0 \|\vec{r}\|^3} \vec{r} \right)$$

$$V(\vec{r}) = P_0 \hat{k} \bullet \frac{R^3 (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{3\varepsilon_0 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} z}$$

Ejemplo

Campos eléctrico y de desplazamiento en todo el espacio.



I) r<R:

$$V(\vec{r})=\frac{P_0}{3\varepsilon_0}z$$

$$\vec{E}=-\nabla V=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_0}{3\varepsilon_0}z\right)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{E}=-\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}$$

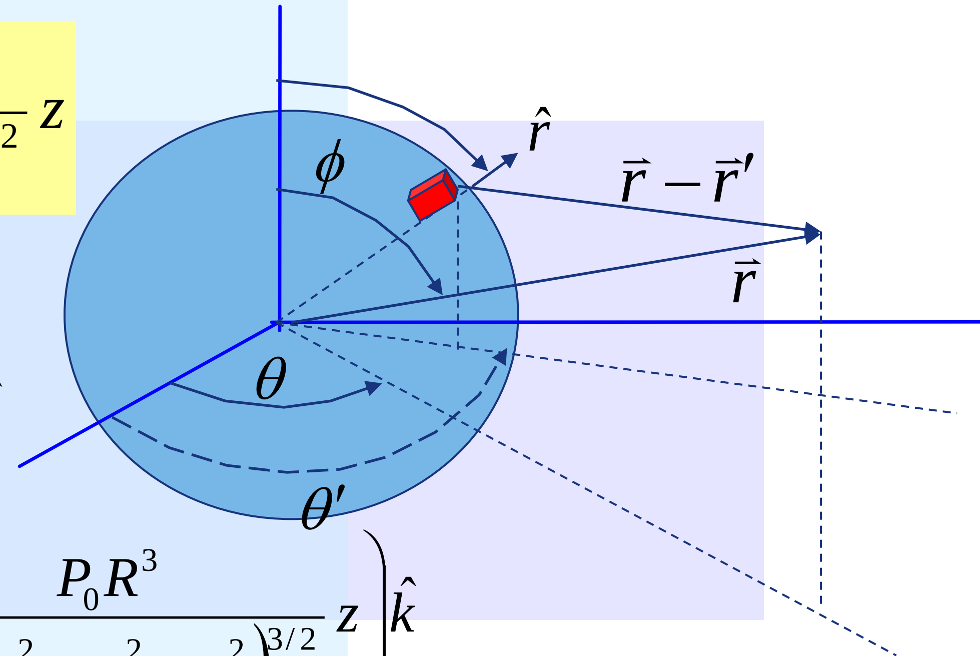
$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=-\varepsilon_0\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}+P_0\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{D}=\frac{2P_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}$$

Ejemplo

II) r>R:

$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} z$$



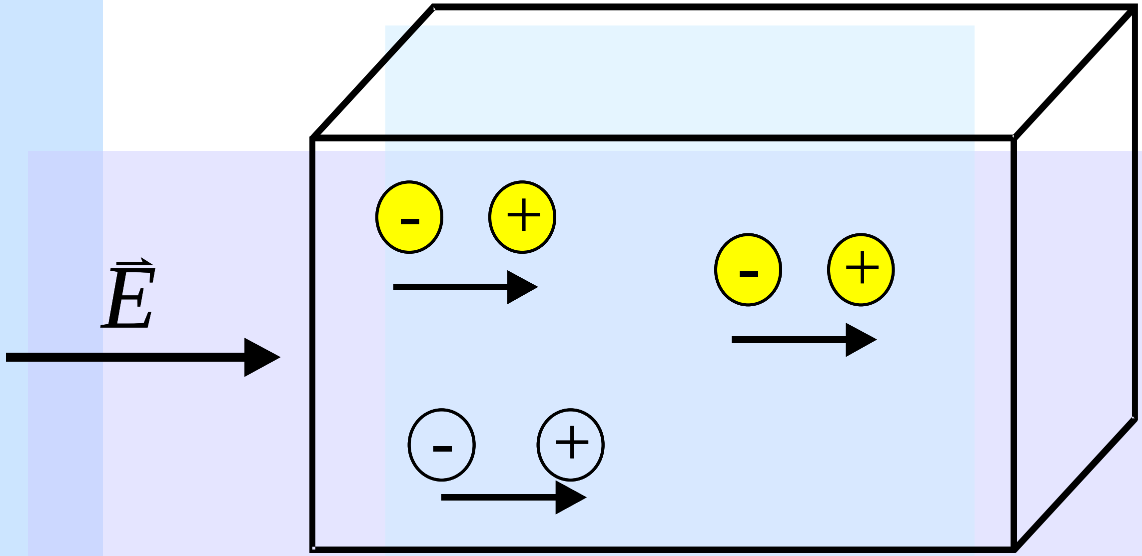
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} z\right)\hat{i}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} z\right)\hat{j} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} z\right)\hat{k}$$

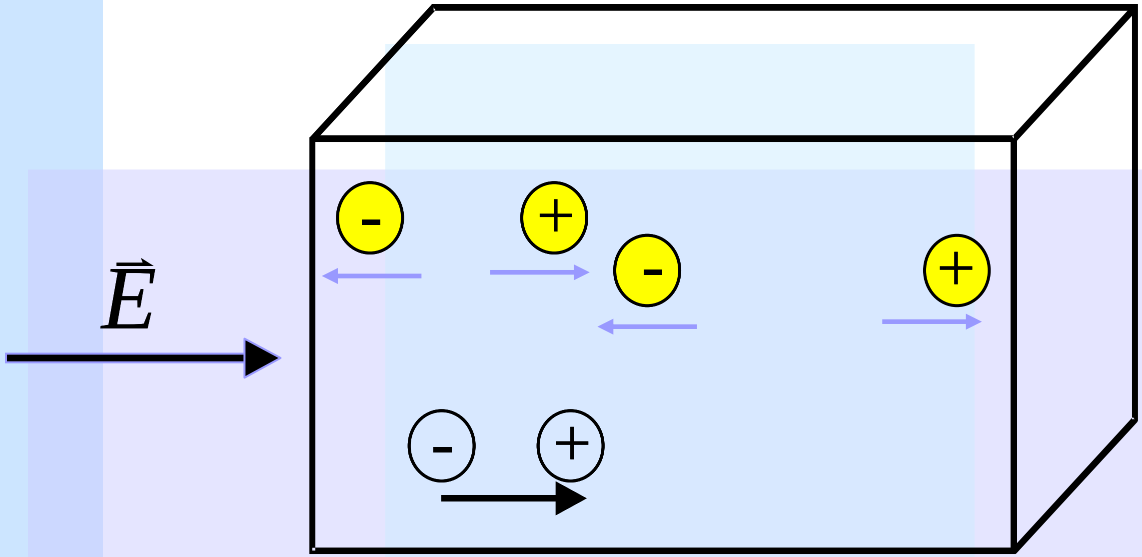
Se obtiene finalmente

$$\vec{E} = \frac{P_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^5}\left(3z\vec{r} - r^2\hat{k}\right) \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \frac{P_0 R^3}{3 r^5}\left(3z\vec{r} - r^2\hat{k}\right)$$

Ruptura dieléctrica



Ruptura dieléctrica



El mínimo valor del campo eléctrico para el cual se produce la ruptura se denomina "fuerza dieléctrica"

Constante dieléctrica y fuerza dieléctrica

Material	Constante Dieléctrica ε_r (adimensional)	Fuerza dieléctrica E (V/m)
Titanato de Bario	1200	7.5×10^6
Agua (mar)	80	
Agua destilada	81	
Nylon	8	
Papel	7	12×10^6
Vidrio	5 -10	35×10^6
Mica	6	70×10^6
Porcelana	6	
Bakelita	5	20×10^6
Cuarzo (fusionado)	5	30×10^6
Goma (dura)	3.1	25×10^6
Madera	2.5 – 8.0	
Polyestyreno	2.55	
Polypropyleno	2.25	
Parafina	2.2	30×10^6
Petroleo	2.1	12×10^6
Aire (a 1 atmósfera)	1	3×10^6

(*) Estos valores pueden variar en otras Tablas ya que hay muchas variedades y aleaciones de cada material y la permitividad es además sensible a la temperatura, impurezas, etc.