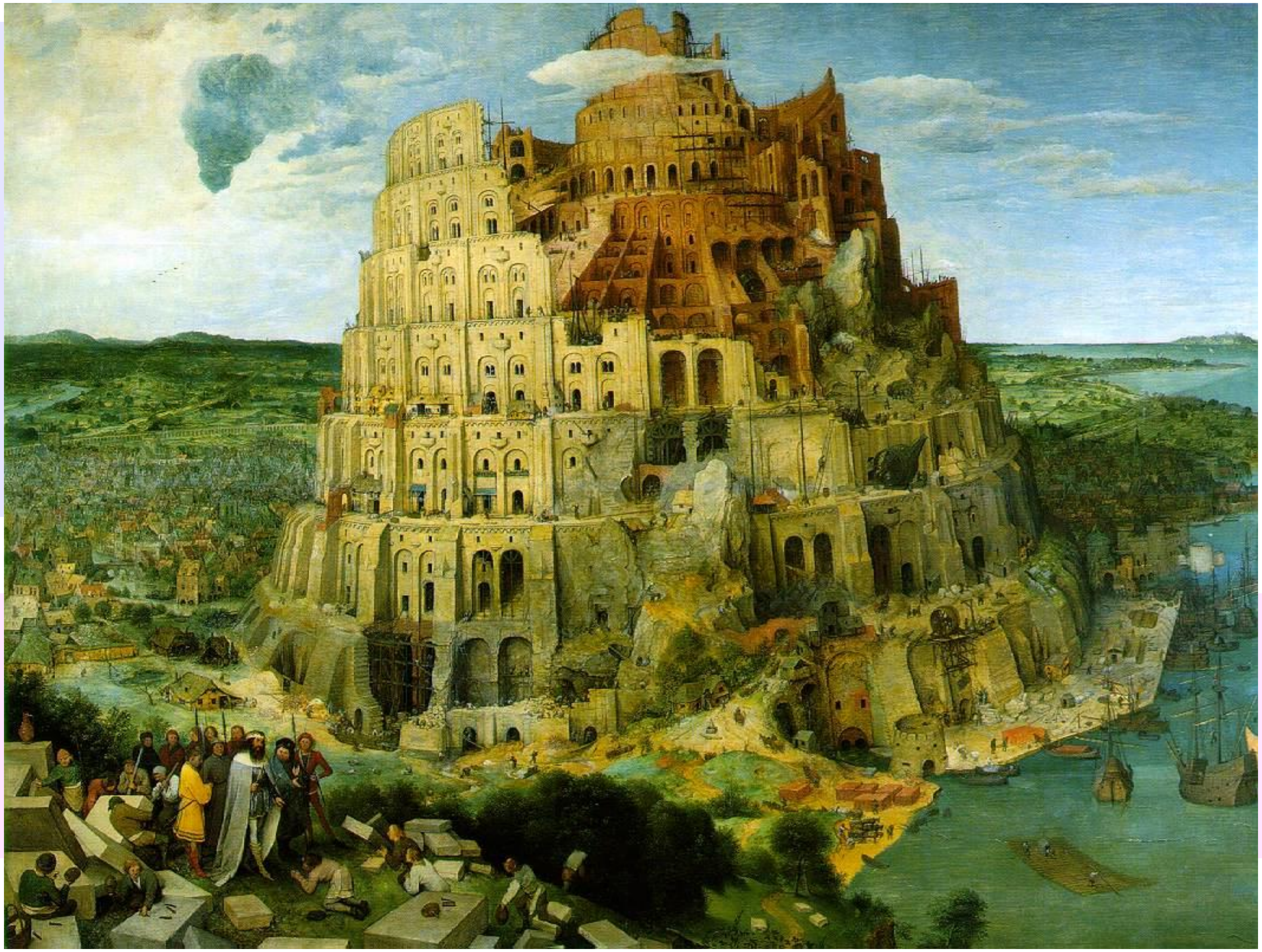
Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

# FI 2002 ELECTROMAGNETISMO
# Clase 6
## Medios Materiales I


**LUIS S. VARGAS**
**Area de Energía**
**Departamento de Ingeniería Eléctrica**
**Universidad de Chile**

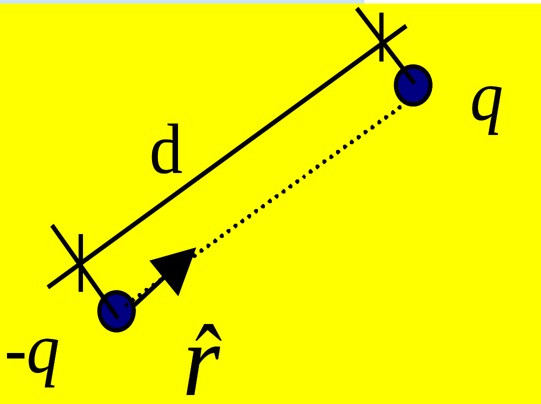
# INDICE

- Clasificación y Modelamiento de medios materiales
- Materiales no Polares, polares
- Vector Polarización
- Potencial Eléctrico en la Materia
- Cargas de polarización
- Generalización 1a Ecuación de Maxwell



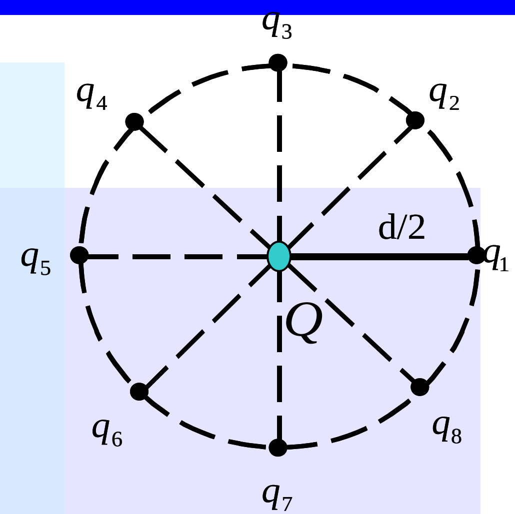
Pieter Bruegel,
La torrre de Babel, 1563

# Previa: Dipolos




$$\vec{p} = qd\hat{r}$$

$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

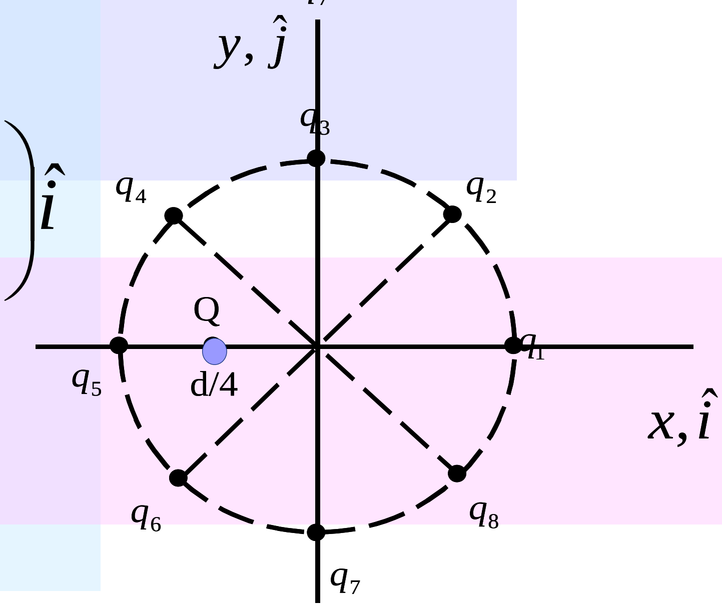



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{8} q_i \times \vec{r}_i + Q \times 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = 0$$

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i - Q\left(\frac{d}{4}\right)\hat{i}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = -Q\frac{d}{4}\hat{i}$$



# MEDIOS MATERIALES

**Dieléctricos o aislantes:** las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio (polímeros, aceite, papel)

**Conductores:** las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material (cobre, aluminio, tejido humano)

**Semiconductores:** un material que presenta un comportamiento no lineal en función del campo eléctrico aplicado (aleaciones sintéticas de silicio, germanio, etc.)

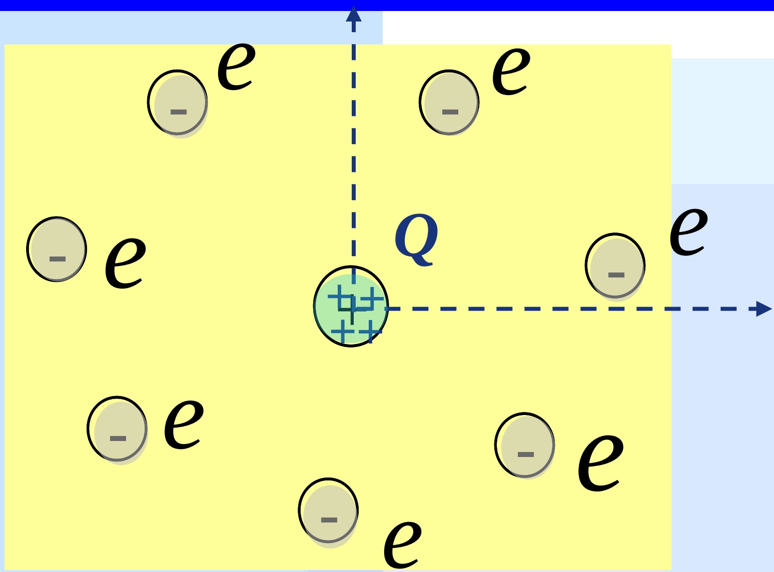
# MEDIOS MATERIALES

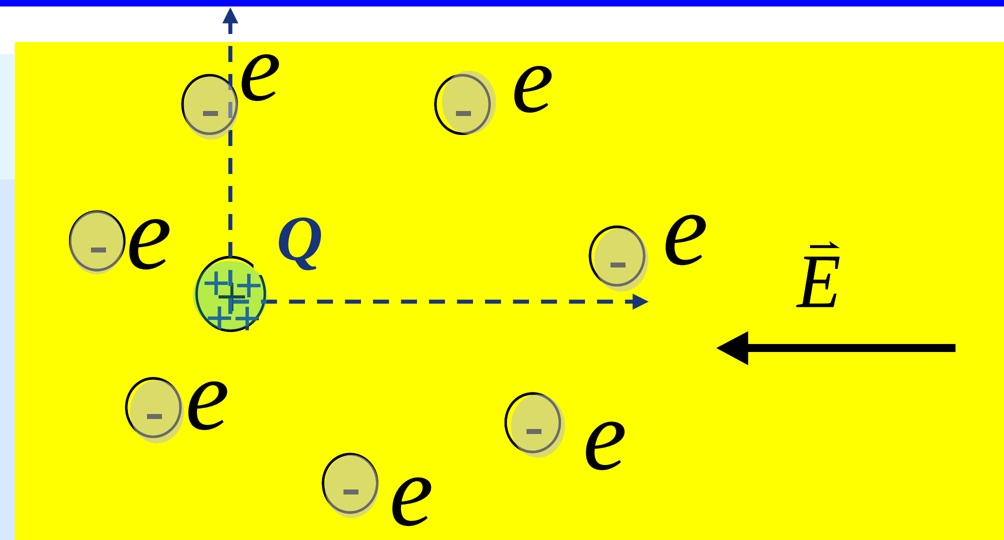
**Dieléctricos o aislantes:** las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio (polímeros, aceite, papel)

Materiales NO polares

Materiales polares

# Materiales No Polares




**Modelo de átomo simple**

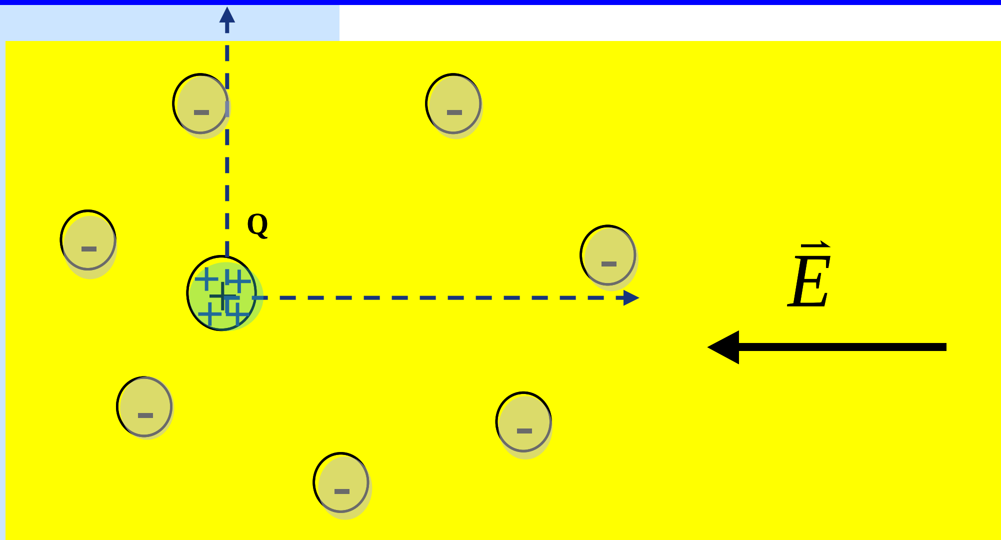
- Tiene simetría esférica
- Carga neta es nula

$$Q + \sum e = 0$$

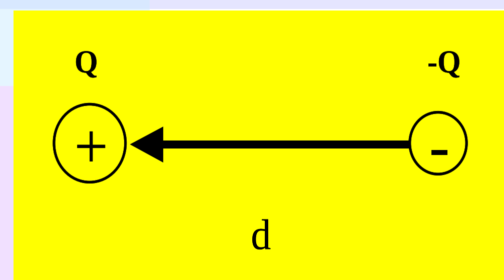
**Deformación producida por campo aplicado:**

- Se produce un pequeño desplazamiento en torno al punto de equilibrio
- Carga neta nula

# Materiales No Polares



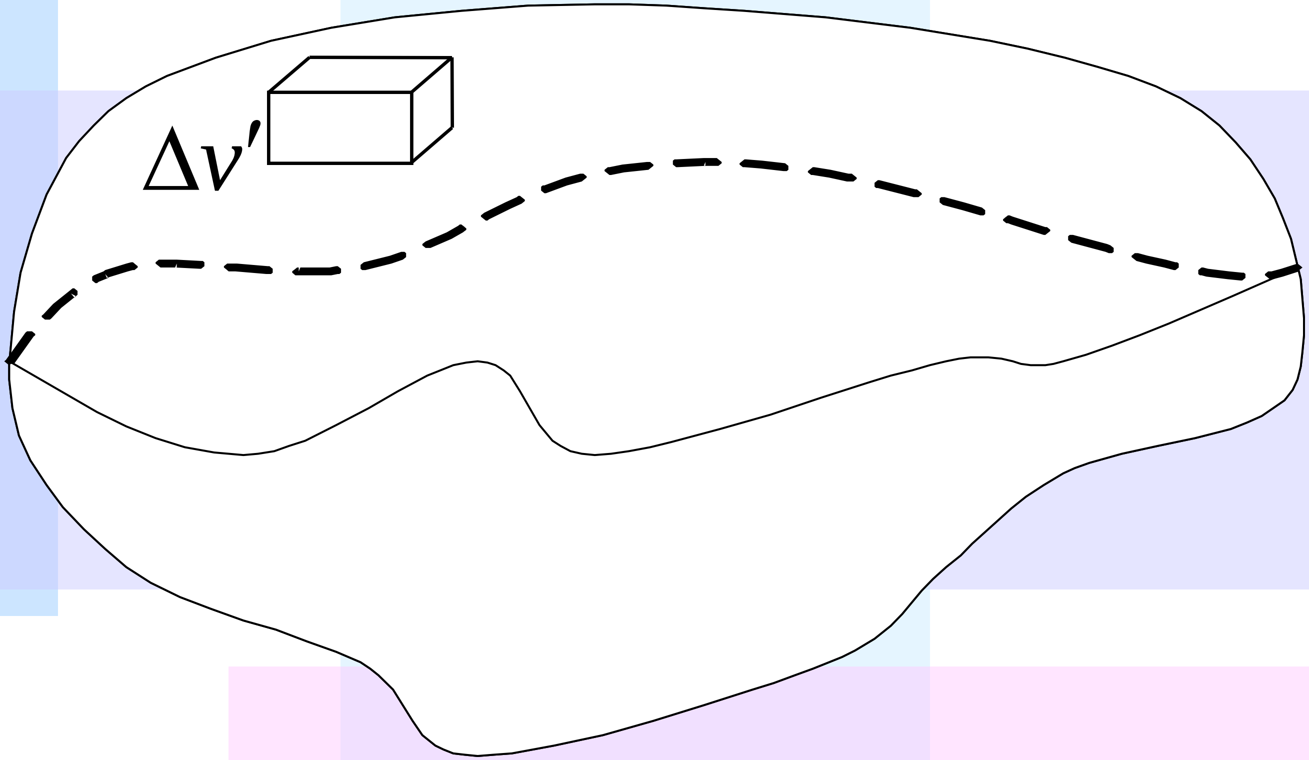

Deformación producida por campo aplicado



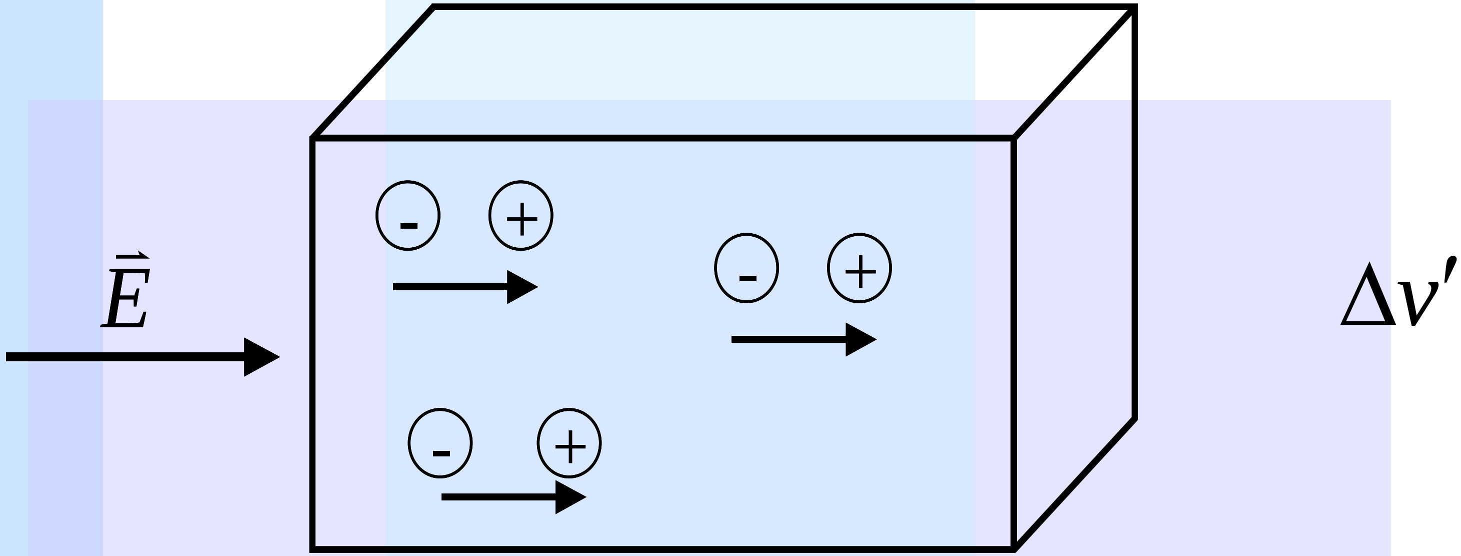

Representación mediante dipolo

# Materiales No Polares

## Elemento de Volumen



# Materiales No Polares



# Materiales No Polares

## Elemento de Volumen

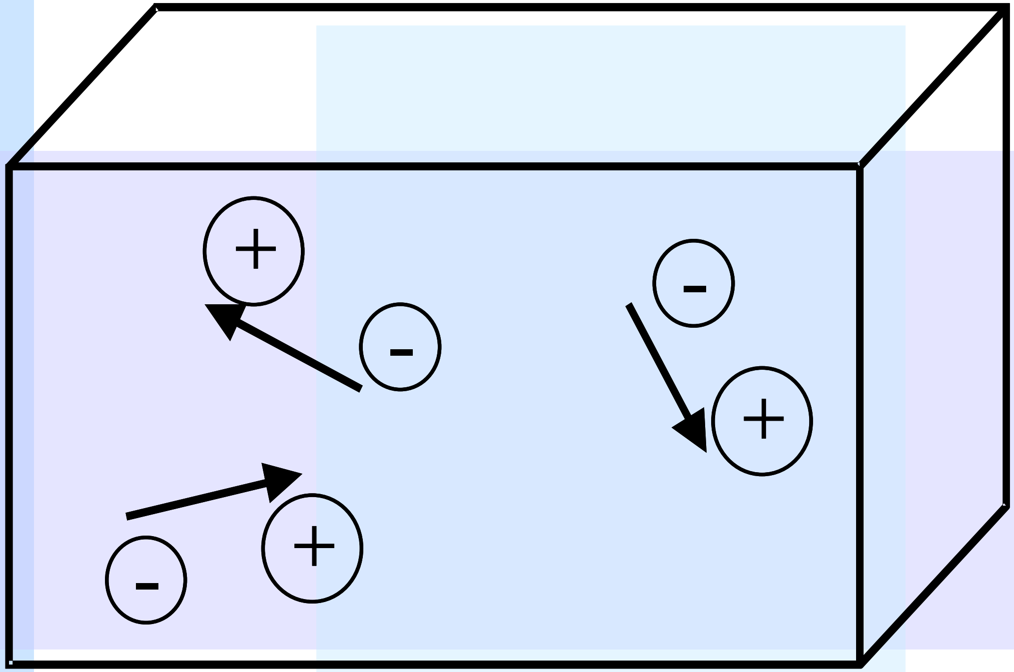
$$\vec{E} = 0$$

$$\Delta v'$$

**El material no posee dipolos si no hay campo externo**

# Materiales Polares

$$\vec{E} = 0$$



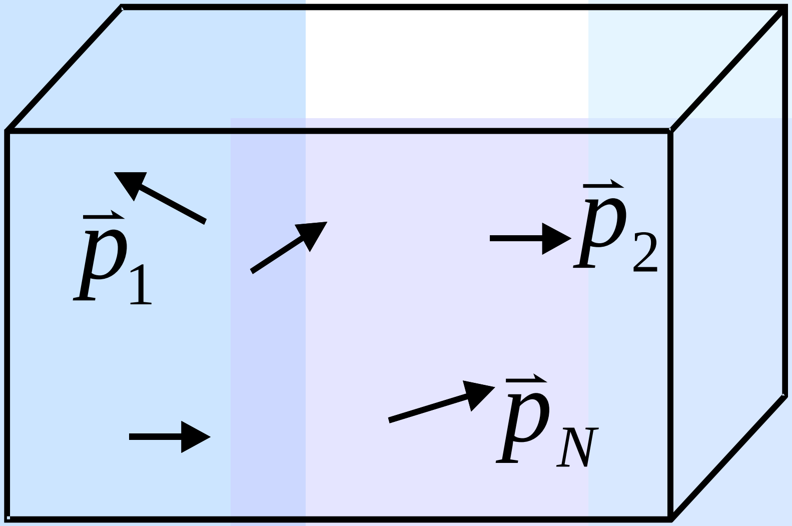
- Por su estructura molecular poseen dipolos en forma natural
- Generalmente orientados en forma aleatoria

# Modelo de los Materiales Dieléctricos

- Cargas (electrones y protones) de los átomos o moléculas mantienen su ligazón
- Cargas no pueden desplazarse libremente
- Sólo pueden producirse pequeños desplazamientos en torno a un punto de equilibrio fijo
- Carga neta nula

# Vector Polarización

Elemento de Volumen

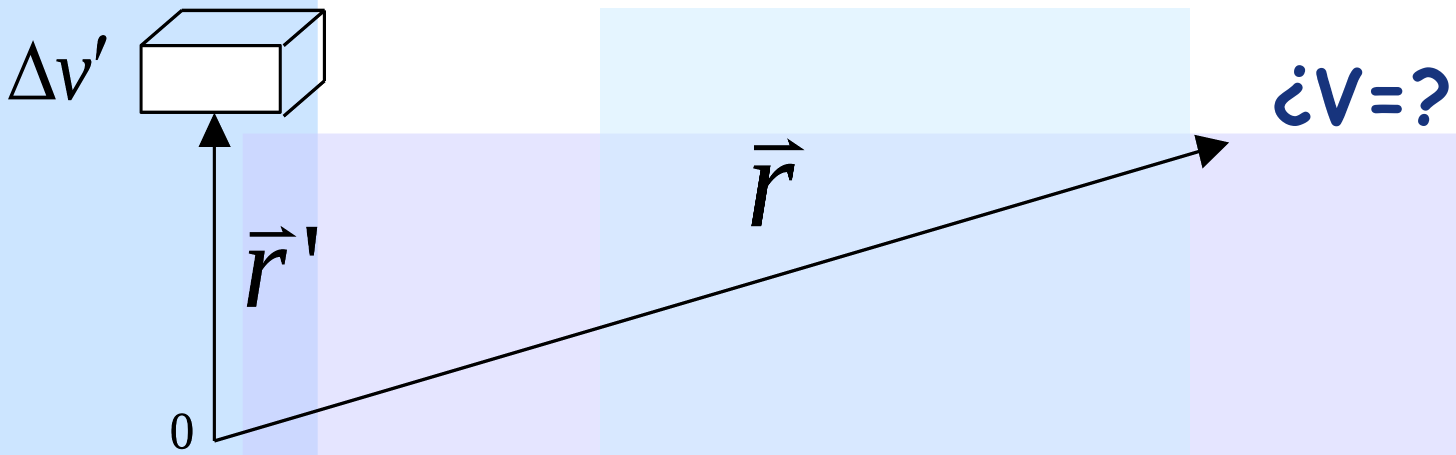



$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \longrightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^{N} Q_k \vec{d}_k}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \to 0} \left[ \frac{\sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k}{\Delta v'} \right]$$

**Dipolos por unidad de volumen [C/m2]**

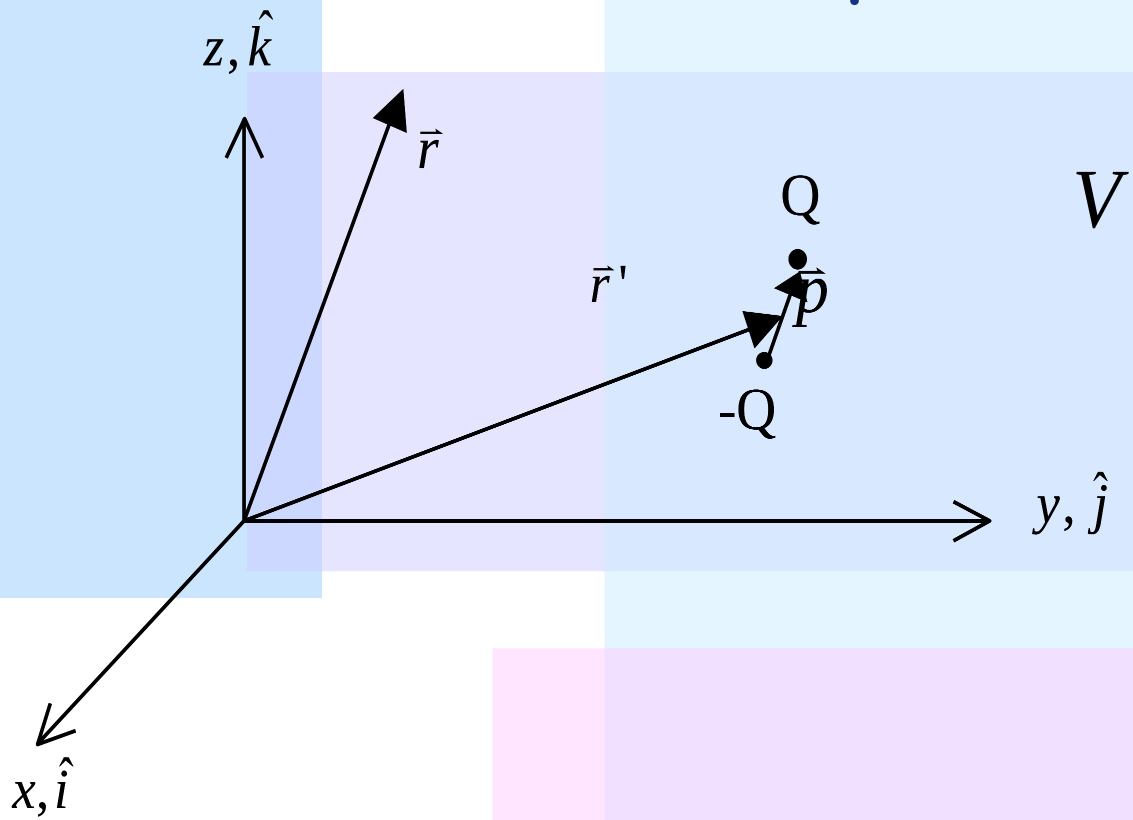
Vector Polarización

# Potencial Eléctrico en la Materia

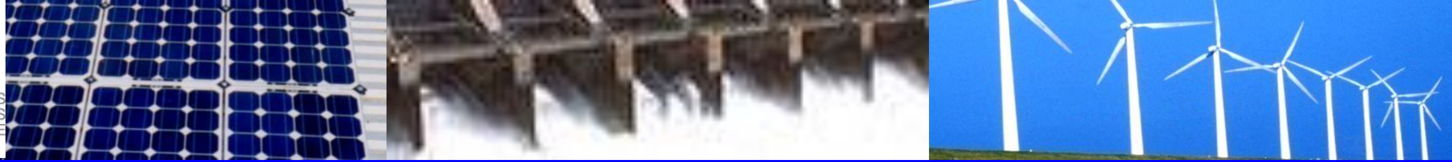


# Potencial Eléctrico en la Materia

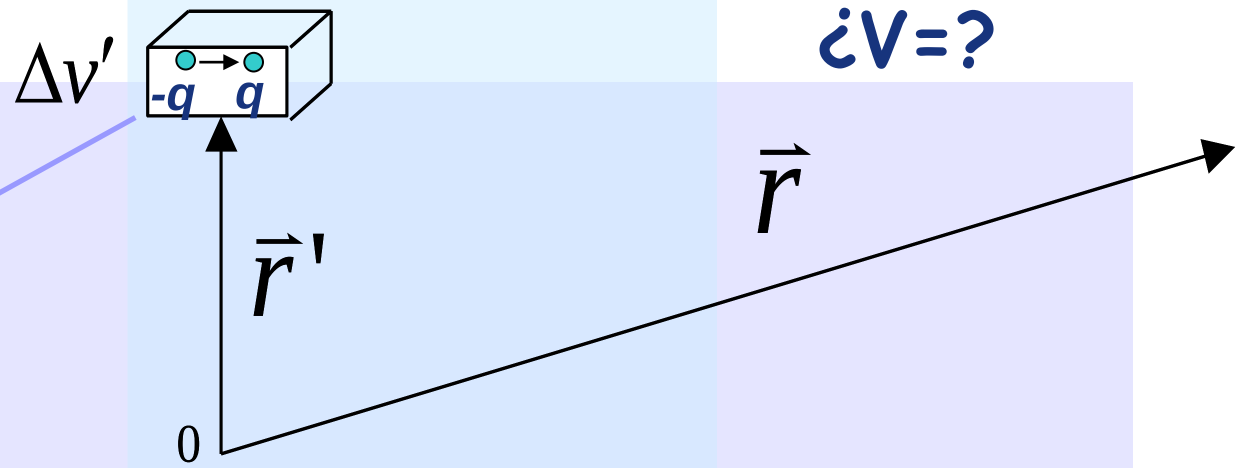
## Recordemos el potencial de un dipolo




$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \, \| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3}$$



# Potencial Eléctrico en la Materia




$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot \Delta v'$$

**Dipolo equivalente**

$$dV(\vec{r}) = \frac{d\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \, \| \vec{r} - \vec{r}\,' \|^3}$$

# Potencial Eléctrico en la Materia

$d\vec{p}$

$\vec{P}$ :Vector polarización

$$dV = \frac{\vec{P}\Delta v' \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|^3} \qquad (2.1)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{P} \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{\left\|\vec{r} - \vec{r}\,'\right\|^3} dv' \qquad (2.2)$$

# Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad
$$\nabla'\frac{1}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}=\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|^3} \qquad (2.3)$$

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \vec{P}\bullet\nabla'\left(\frac{1}{\left\|\vec{r}-\vec{r}\,'\right\|}\right)dv'$$

# Potencial Eléctrico en la Materia

**Usando la identidad** $\nabla \bullet f\vec{A} = f\nabla \bullet \vec{A} + \vec{A} \bullet \nabla f$

$$\nabla' \bullet \left[ \frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \right] = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \nabla' \bullet \vec{P} + \vec{P} \bullet \nabla' \left[ \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \right] \qquad (2.5)$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \left\{ \nabla' \bullet \left[ \frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \right] - \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \nabla' \bullet \vec{P} \right\} dv' \qquad (2.6)$$

# Potencial Eléctrico en la Materia

Usando la identidad $\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \vec{A} dv = \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{A} \bullet d\vec{s}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet d\vec{s}}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} dv'$$

Escribiendo $\vec{P} \cdot d\vec{s} = \vec{P} \cdot \hat{n} ds$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} dv'$$

# Potencial Eléctrico en la Materia

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|} dv'$$

**Tiene la forma**

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}\,') ds'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

**donde**

$$\sigma(\vec{r}\,') = \sigma_P(\vec{r}\,') = \vec{P}(\vec{r}\,') \bullet \hat{n}$$

# Potencial Eléctrico en la Materia

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\vec{P} \bullet \hat{n} ds}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} - \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} dv'$$

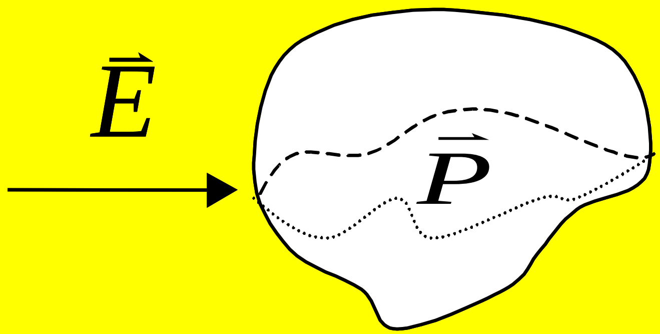
**También si**

$$\rho(\vec{r}\,') = \rho_P(\vec{r}\,') = -\nabla' \bullet \vec{P}(\vec{r}\,') \quad \Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_P(\vec{r}\,') dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

# Cargas de polarización

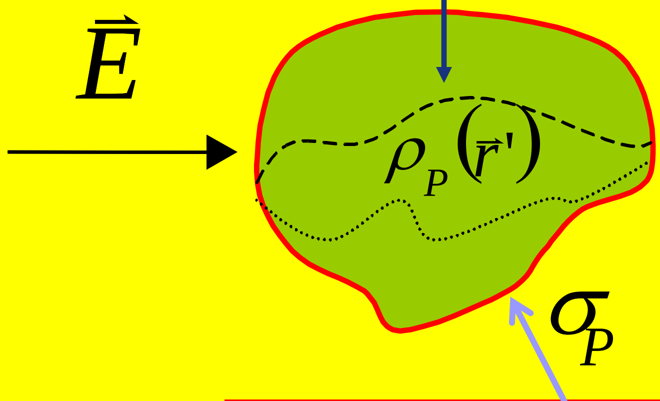
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint_{S(\Omega)} \frac{\sigma_P(\vec{r}')ds'}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{\rho_P(\vec{r}')}{\left\|\vec{r}-\vec{r}'\right\|} dv'$$

**Material dieléctrico**




$\Leftrightarrow$

**Carga en volumen**

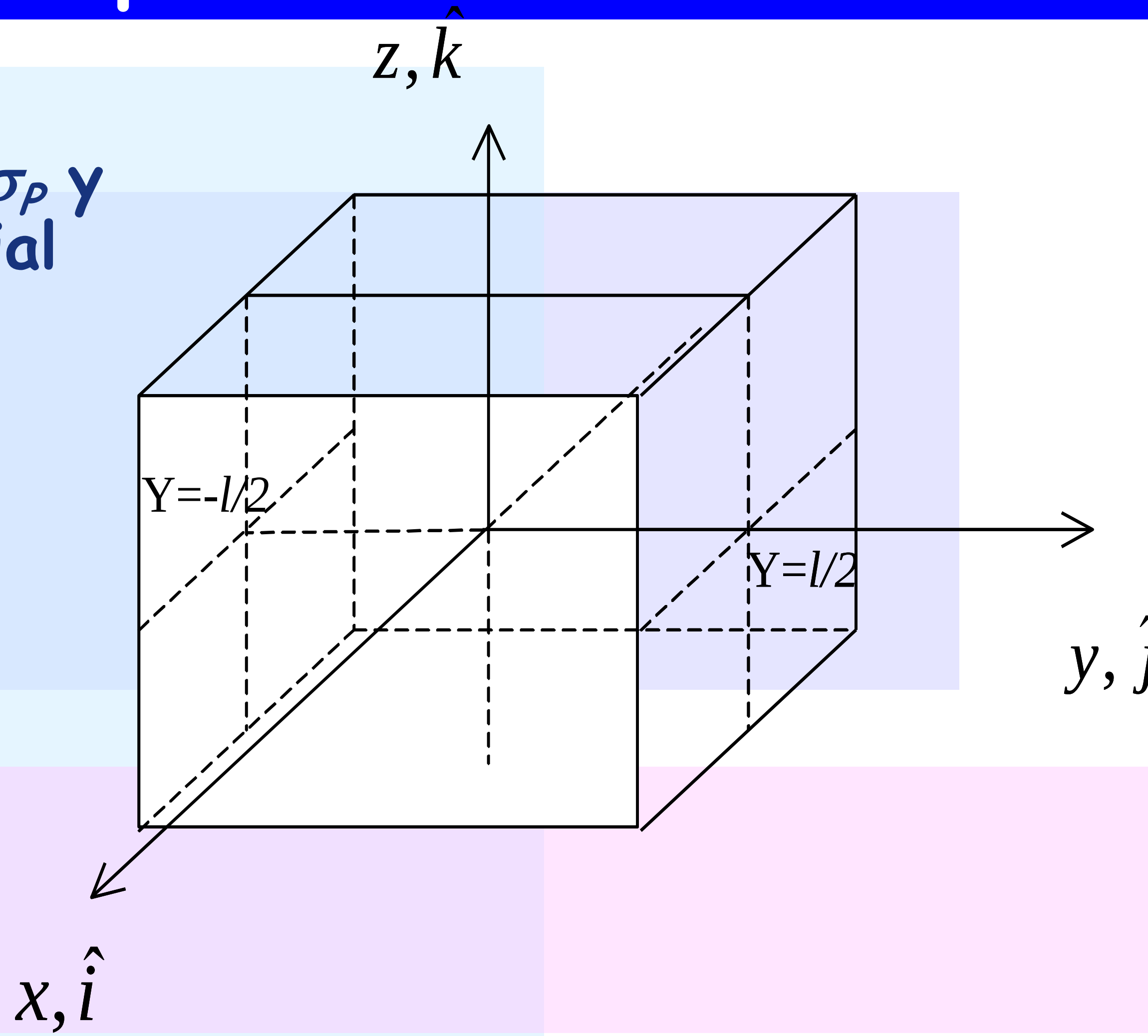



**Carga superficial**

# Ejemplo

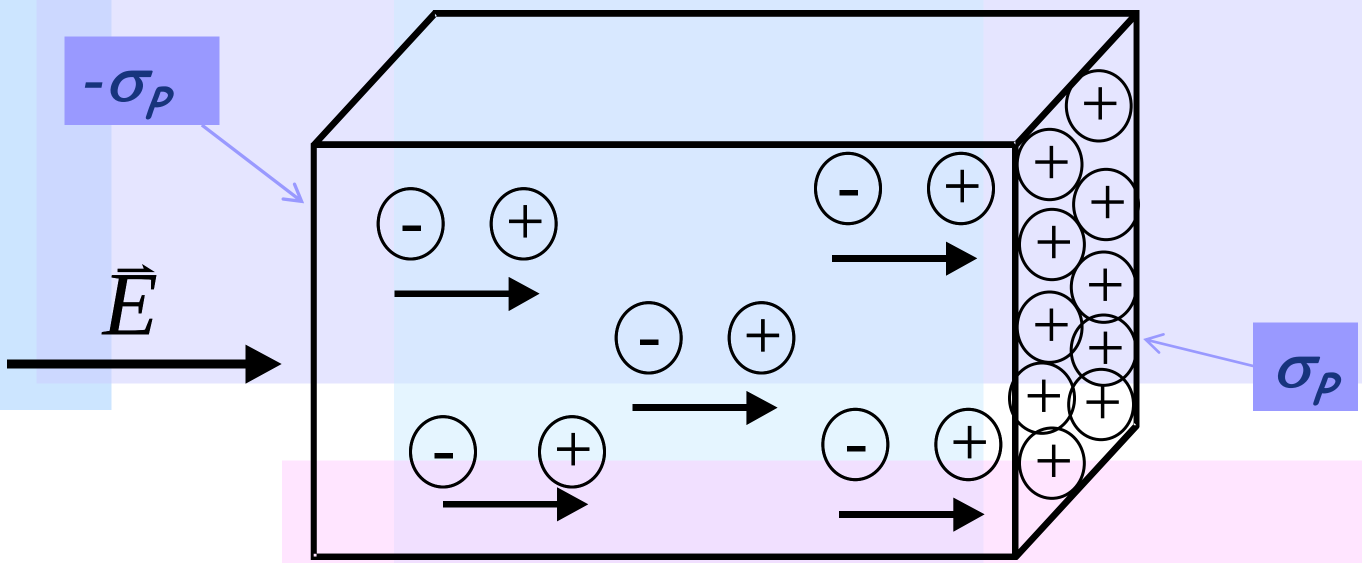
**Calcular densidades de carga de polarización $\sigma_P$ y $\rho_P$ si el cubo de material posee una polarización dada por el vector**

$$\vec{P} = a\vec{r}$$



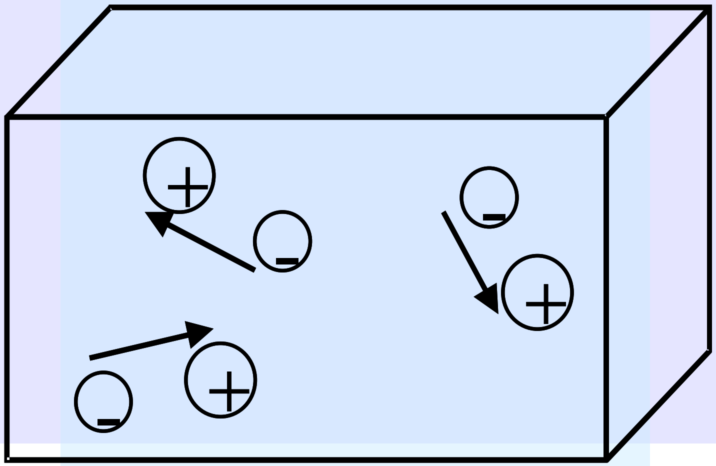
# Propiedades de cargas de polarización

- Cargas de $\sigma_P$ y $\rho_P$ obedecen a la alineación que experimentan los dipolos del material dieléctrico y no corresponden a cargas libres al interior de él.



# Propiedades de cargas de polarización

- Las cargas de $\rho_P$ y $\sigma_P$ no se mueven (se obtienen de la "rotación" de los dipolos).



Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

# Propiedades de cargas de polarización

- Carga neta de polarización es nula

$$\iiint_{\Omega} \rho_P(\vec{r}\,')dv' + \oiint_{S(\Omega)} \sigma_P(\vec{r}\,')ds' = \iiint_{\Omega} -\nabla'\cdot P dv' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P}\cdot d\vec{s}\,'$$

$$= -\oiint_{S(\Omega)} \vec{P}\cdot d\vec{s}\,' + \oiint_{S(\Omega)} \vec{P}\cdot d\vec{s}\,'$$

$$= 0$$

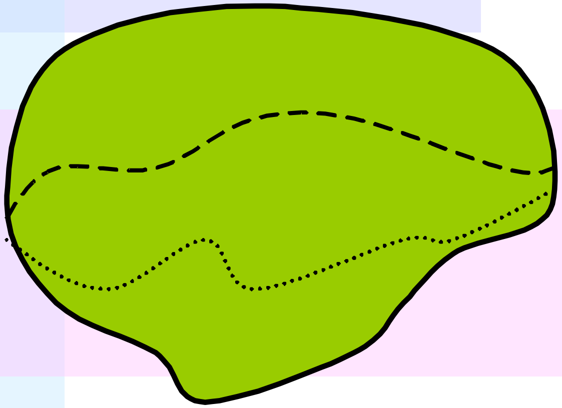
# Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

**Caso general: Hay distribución de cargas libre $\rho_L$ al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización $\rho_P$**

**Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

**Donde** $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$



# Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

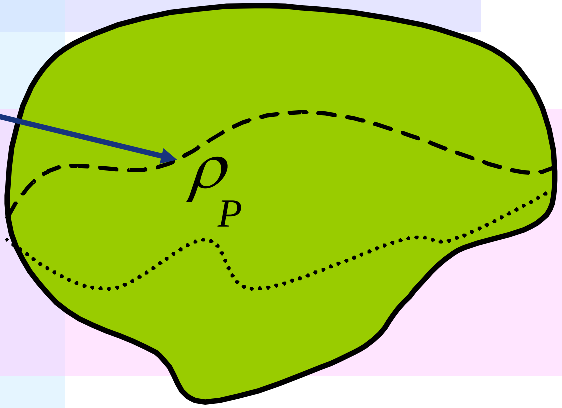
Caso general: Hay distribución de cargas libre $\rho_L$ al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización $\rho_P$

Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$

Carga de polarización en volumen



# Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

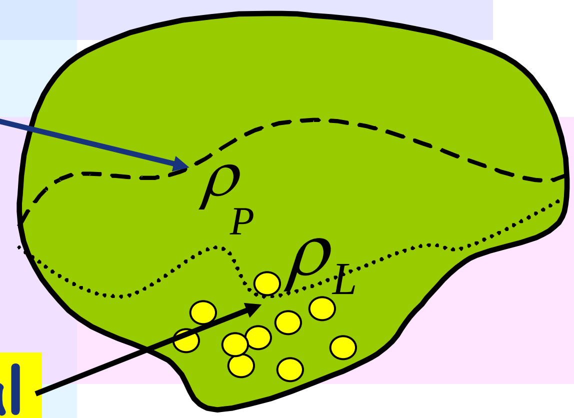
Caso general: Hay distribución de cargas libre $\rho_L$ al interior de un material dieléctrico (puesta allí a propósito) y además hay distribución de cargas de polarización $\rho_P$

Luego la 1ª ecuación de Maxwell queda

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Donde $\rho_{total} = \rho_L + \rho_P$

Carga de polarización en volumen

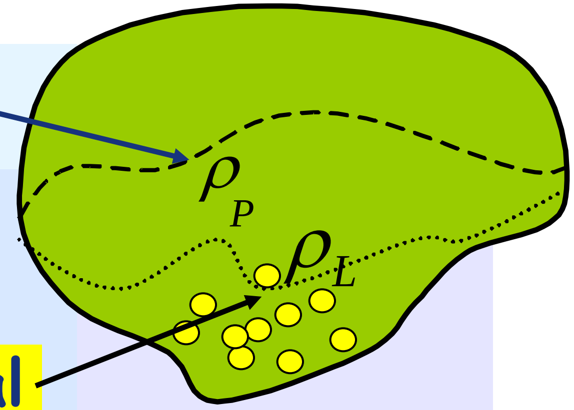



Carga libre en el interior del material

# Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material




$$\rho_L + \rho_P = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} - \rho_P$$

**pero** $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$ $\Rightarrow$

$$\rho_L = \nabla \cdot \varepsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (2.18)$$

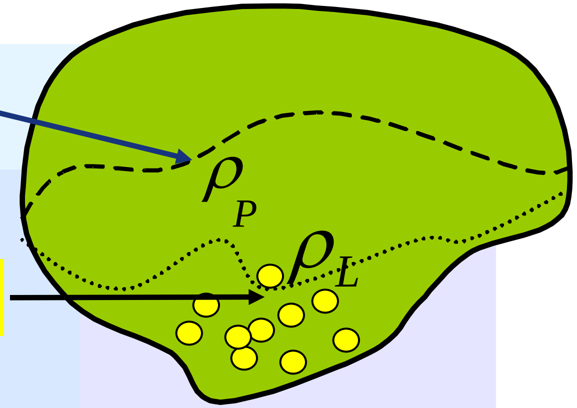
$$\rho_L = \nabla \cdot \underbrace{\left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)}_{} \quad (2.19)$$

Definición Vector desplazamiento $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

# Generalización 1ª Ecuación de Maxwell

Carga de polarización en volumen

Carga libre en el interior del material




$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \boxed{\Rightarrow \rho_L = \nabla \cdot \vec{D}}$$

1ª Ecuación de Maxwell

integrando

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \rho_L dv}_{Q_{TOTAL}} = \underbrace{\iiint_{\Omega} \nabla \bullet \vec{D}\, dv}_{\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_{TOTAL}}$$

Ley de Gauss en medios materiales