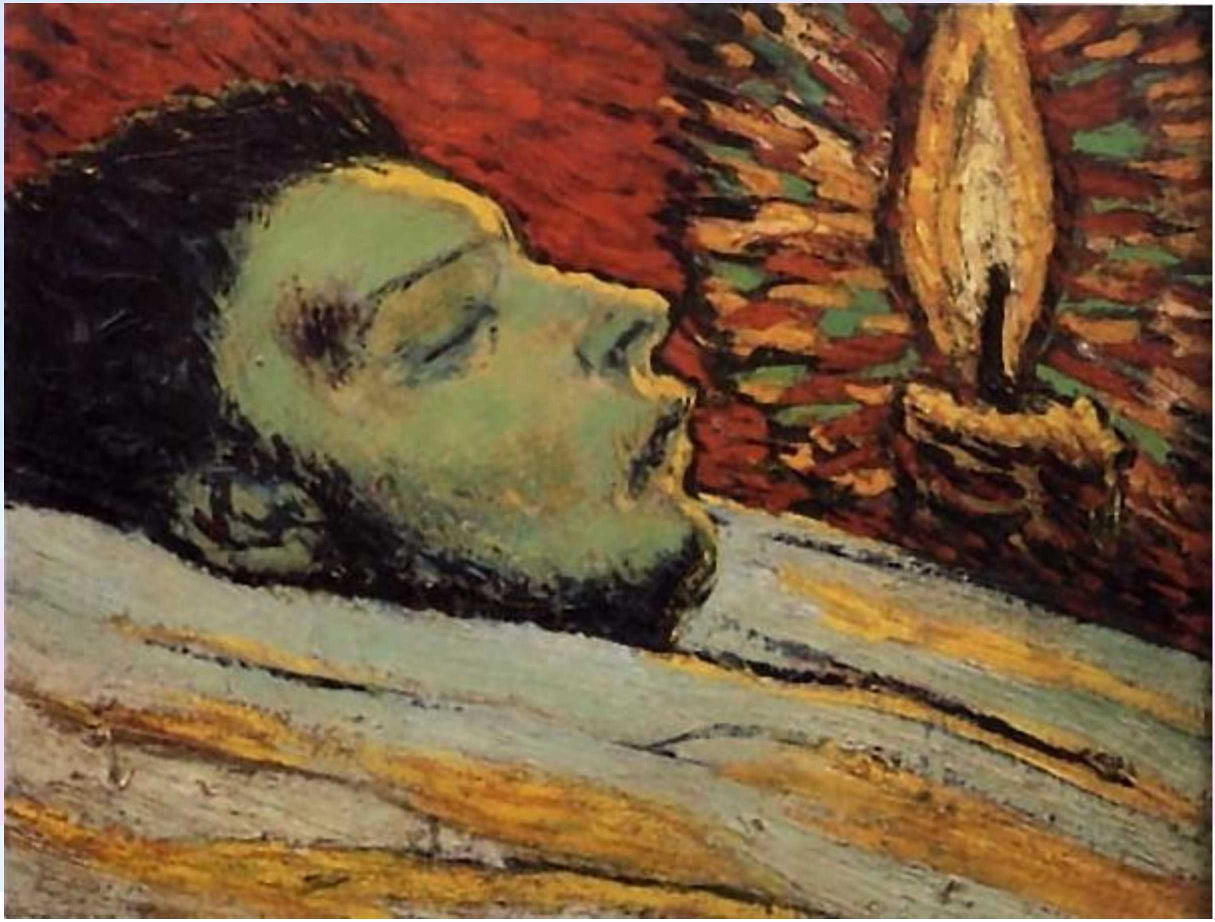
FI 2002
ELECTROMAGNETISMO
Clase 4

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

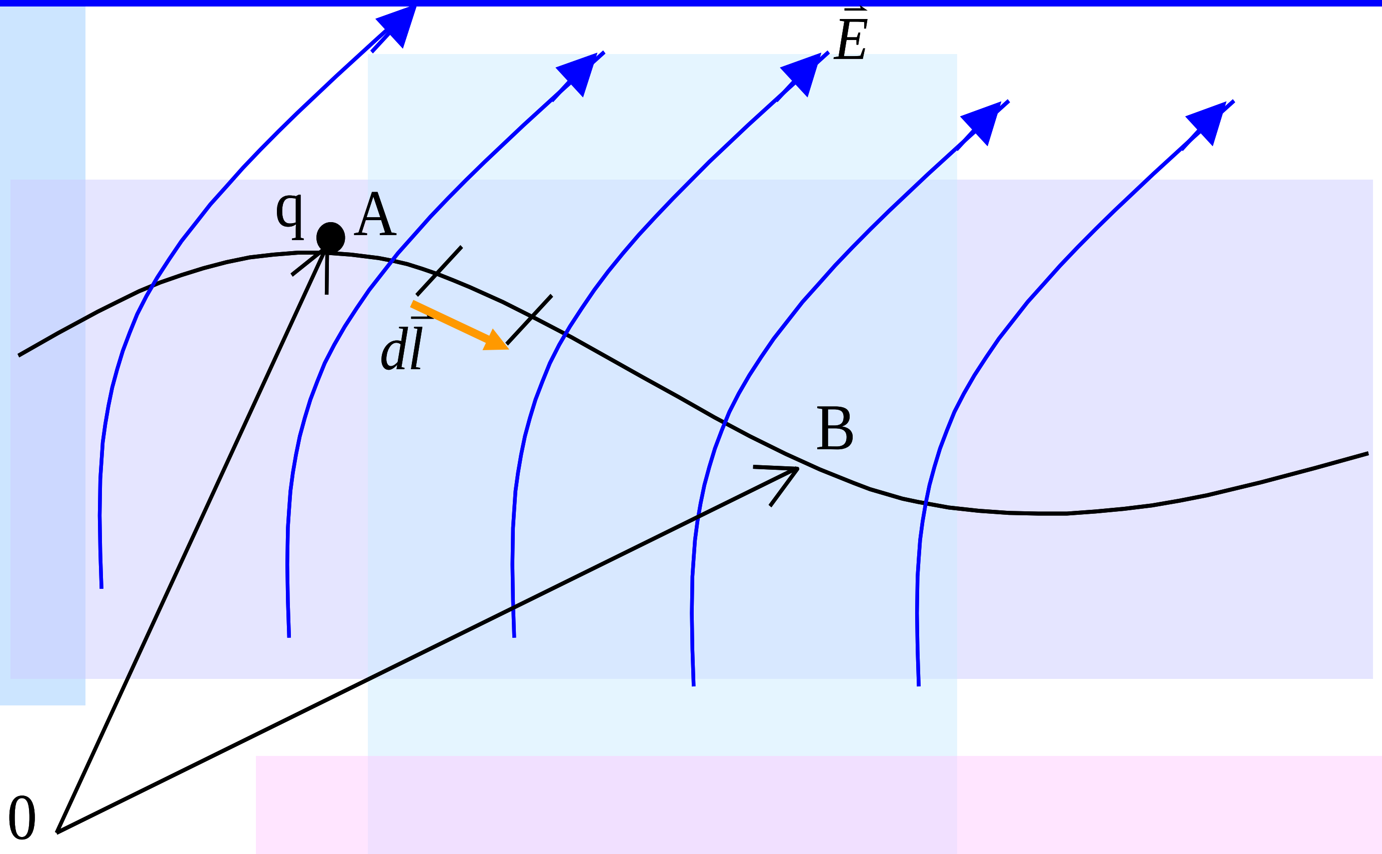
INDICE

- Función Potencial
- Ecuación de Laplace,
- Campo Eléctrico Conservativo



Pablo Picasso, "La muerte de Casagemas", 1901.

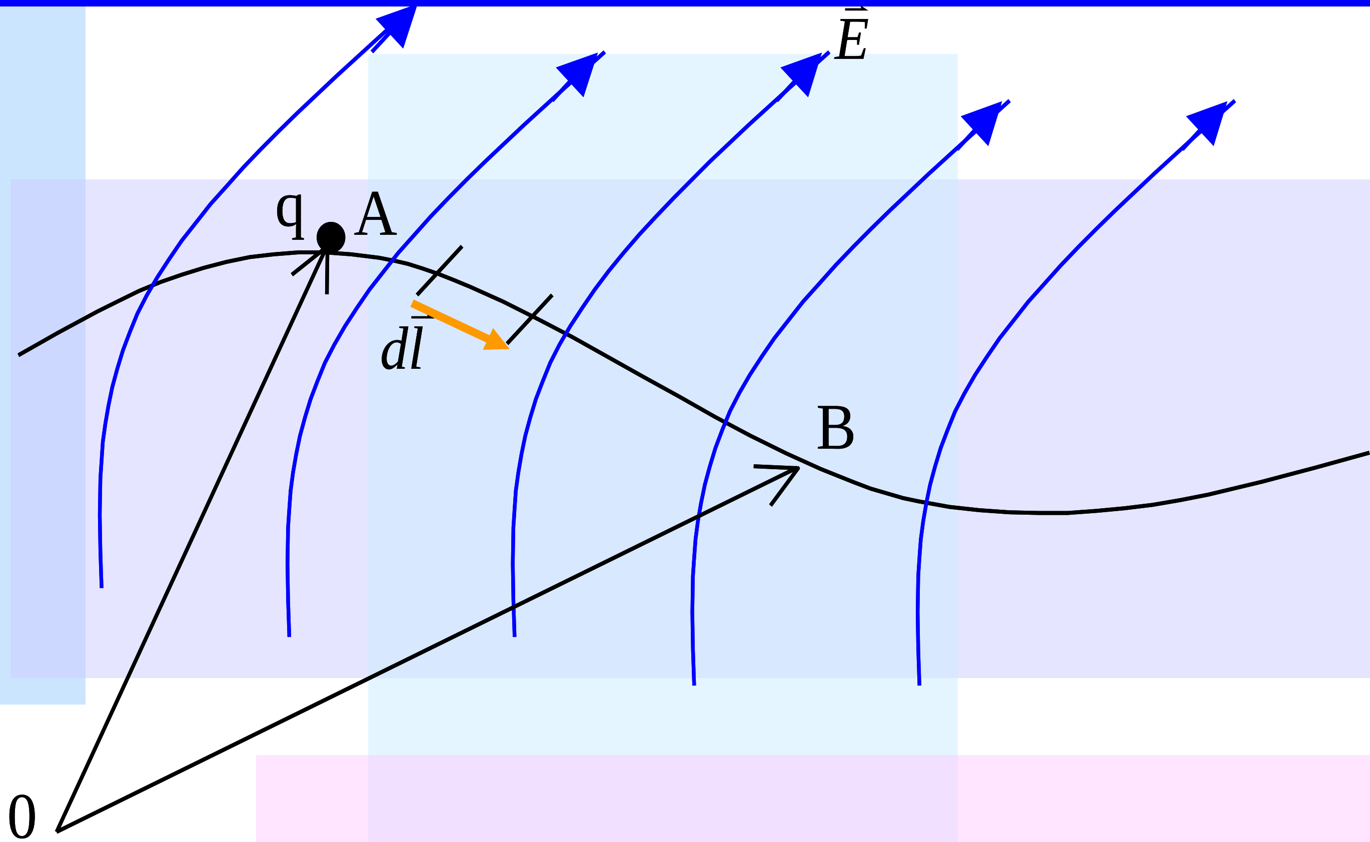
Trabajo de un Campo Eléctrico



Si W >0 Trabajo lo realiza agente externo

Si W < 0 Trabajo lo realiza campo

Trabajo de un Campo Eléctrico

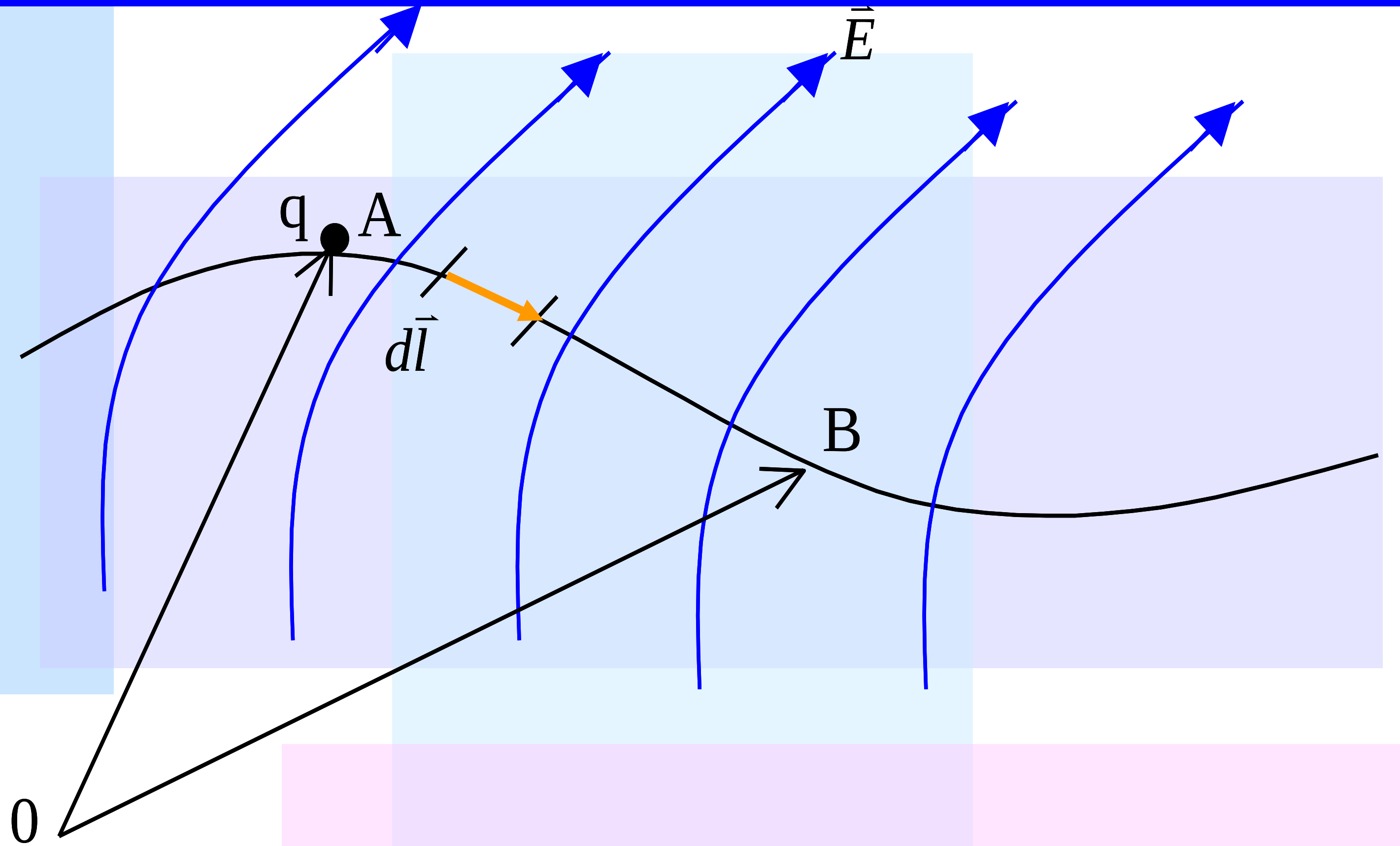


$$dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l}$$

Si $W > 0$ Trabajo lo realiza agente externo

Si $W < 0$ Trabajo lo realiza campo

Trabajo de un Campo Eléctrico

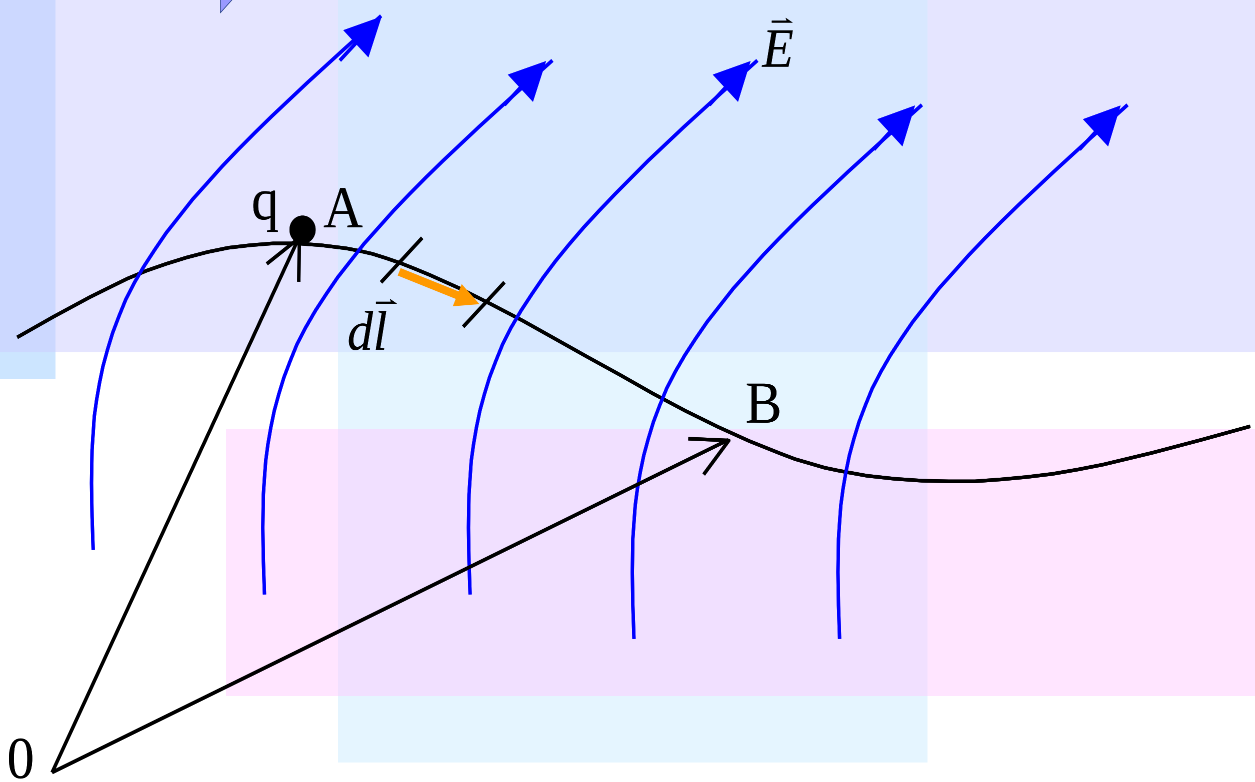


$$dW = -\vec{F} \bullet d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad W = \int_A^B dW = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

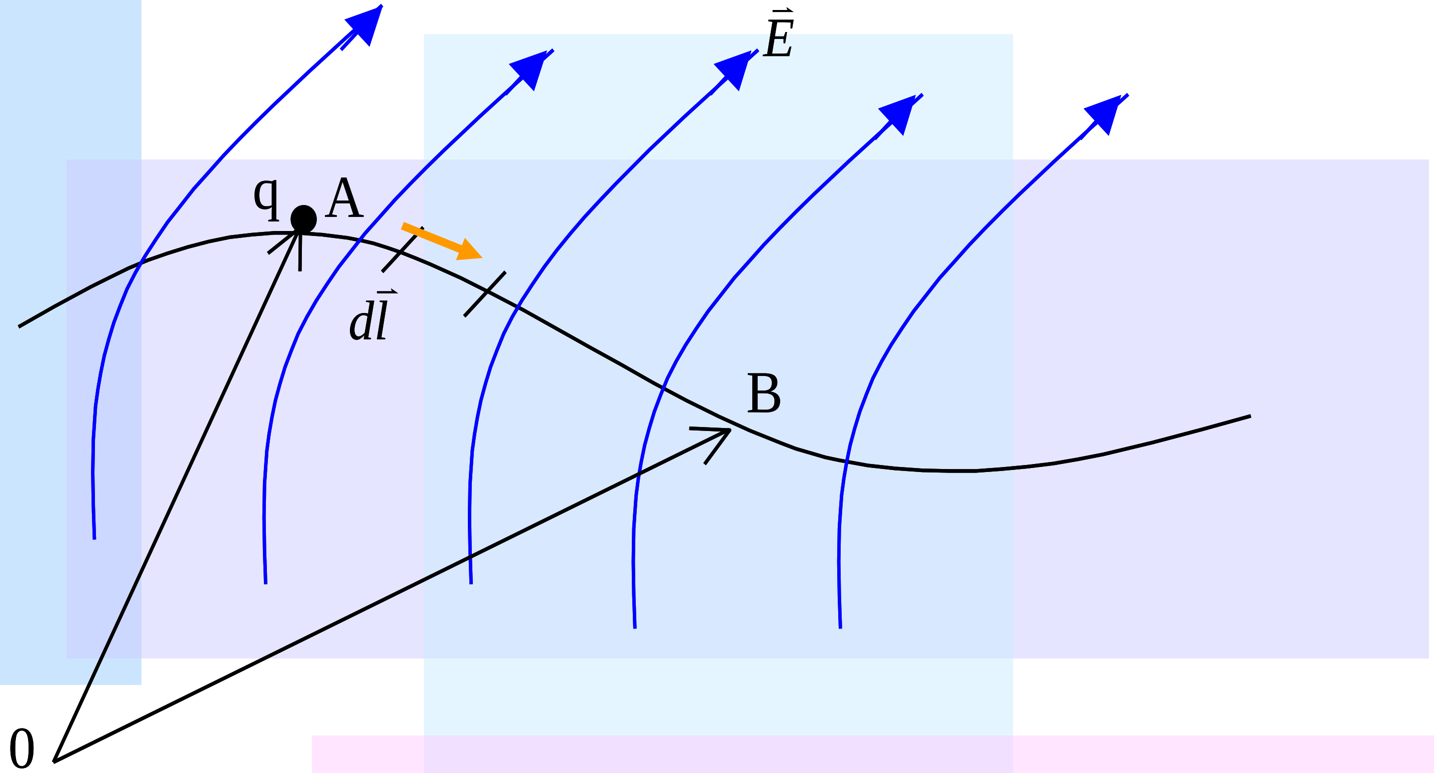
Definición de potencial

Si W>0 → Trabajo lo realiza agente externo

Si W< 0 → Trabajo lo realiza campo eléctrico



Definición de potencial

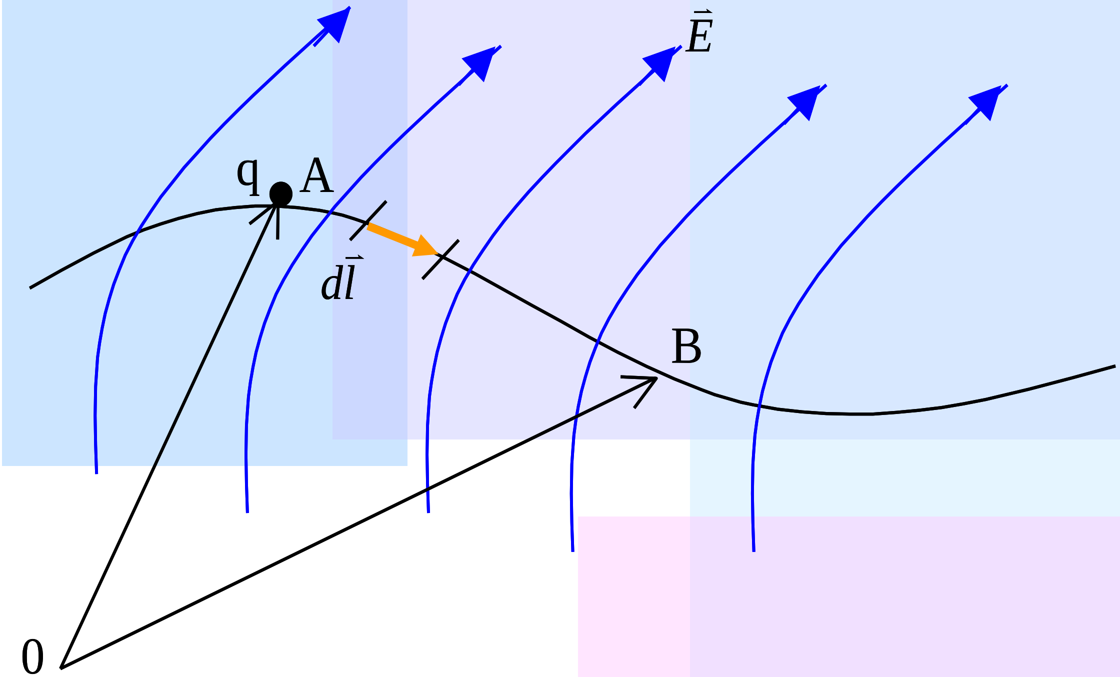


La energía potencial eléctrica por unidad de carga se define como diferencia de potencial eléctrico

$$dV = \frac{dW}{q} = -\vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Definición de potencial

Se define la diferencia de potencial entre los puntos B y A, denominada V_{BA}, como el trabajo por unidad de carga o, equivalentemente, la energía por unidad de carga.



$$\int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$\therefore V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

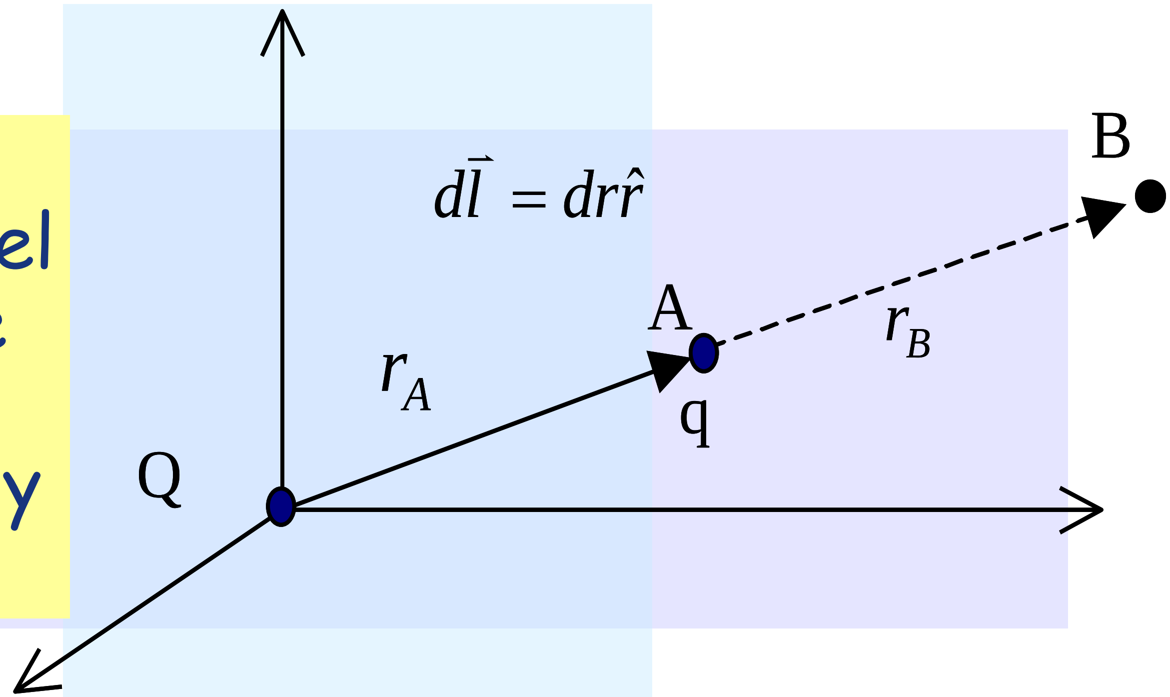
$$\therefore \quad V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Unidades de [J/C], lo cual se denomina Volt [V]. Por ello es común expresar el campo eléctrico en [V/m]

Definición de potencial

Ejemplo 10.

Calcular campo E producido por Q, el trabajo para ir de A a B, y el potencial entre B y A.

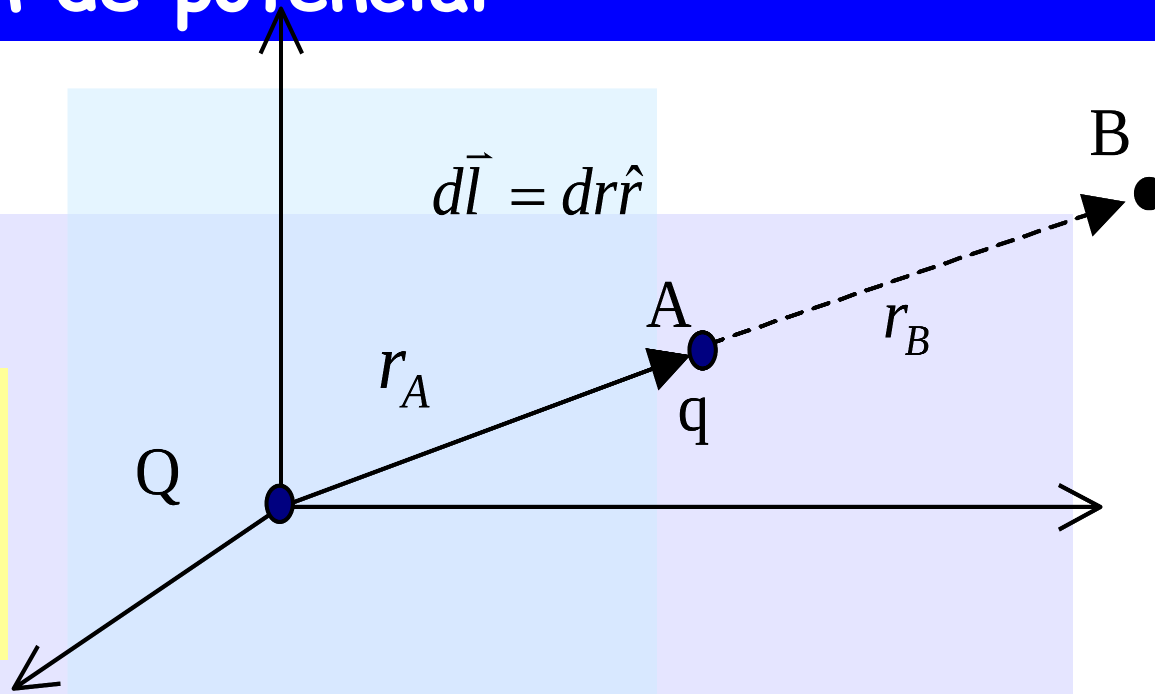


Sol^n

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Definición de potencial

Ejemplo 10.



$$W = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$W = -q\int_{r_A}^{r_B} \frac{Qdr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet \hat{r} = -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}$$

$$W = -q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Dado que $r_A < r_B$:

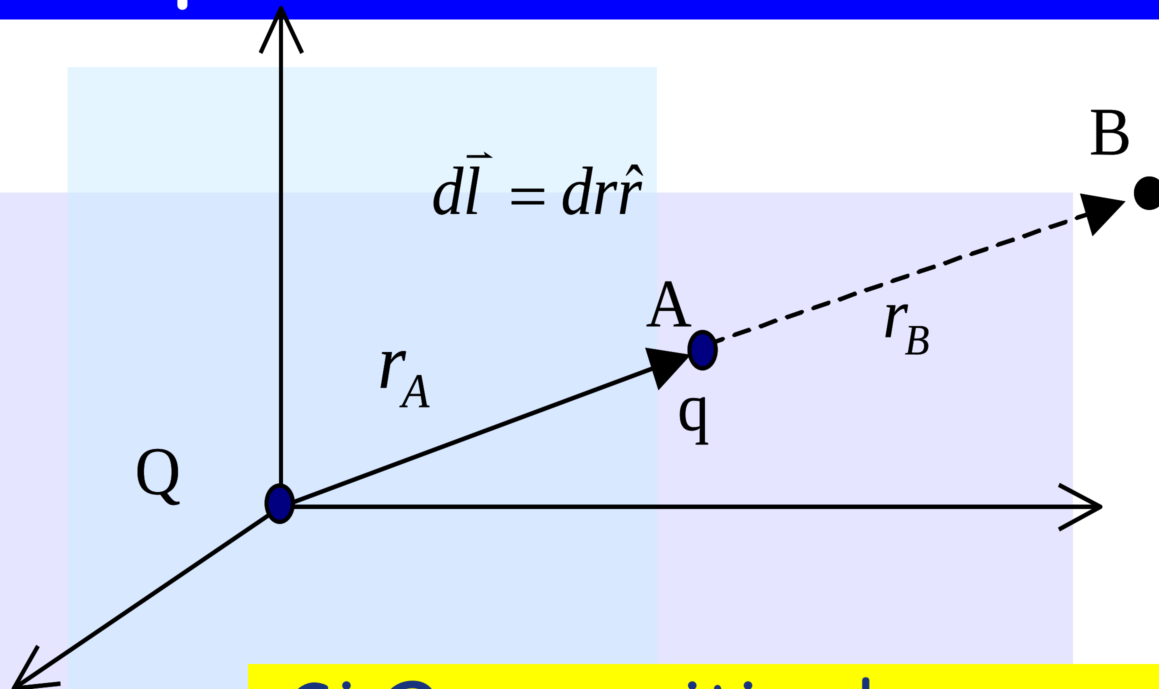
- Si q y Q del mismo signo $\rightarrow$ W negativo
- Otro caso W positivo

Definición de potencial

Ejemplo 10.

$$W = -q\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

$$W = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$



$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

- Si Q es positiva la diferencia de potencial entre B y A es negativa
- Campo va desde mayor potencial a menor potencial

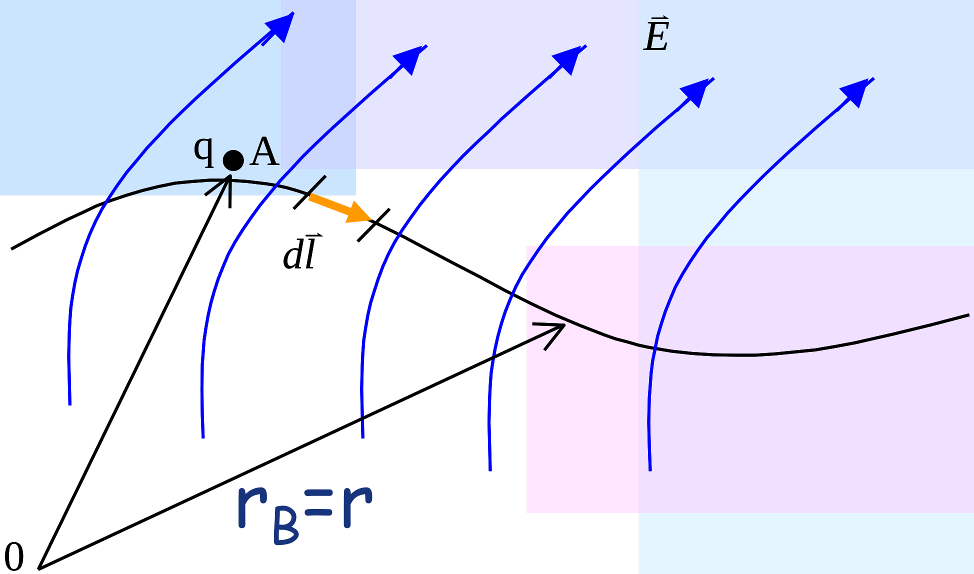
Definición de Potencial

Notar que la expresión para la diferencia de potencial V_{BA} **no** depende de q

$$V_{BA} = \frac{W}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

Si hacemos $r_B = r$ variable, podemos definir una función potencial en todo el espacio.

$$V(\vec{r}) - V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right]$$



Trabajo por unidad de carga para ir desde r_A a r

Definición de potencial

Haciendo tender $r_A \to \infty$ y definiendo V(r_A=∞)=0, se tiene

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\|\vec{r}\|} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|}}$$

Trabajo por unidad de carga para venir desde el infinito a *r*

Función potencial eléctrico es un campo escalar

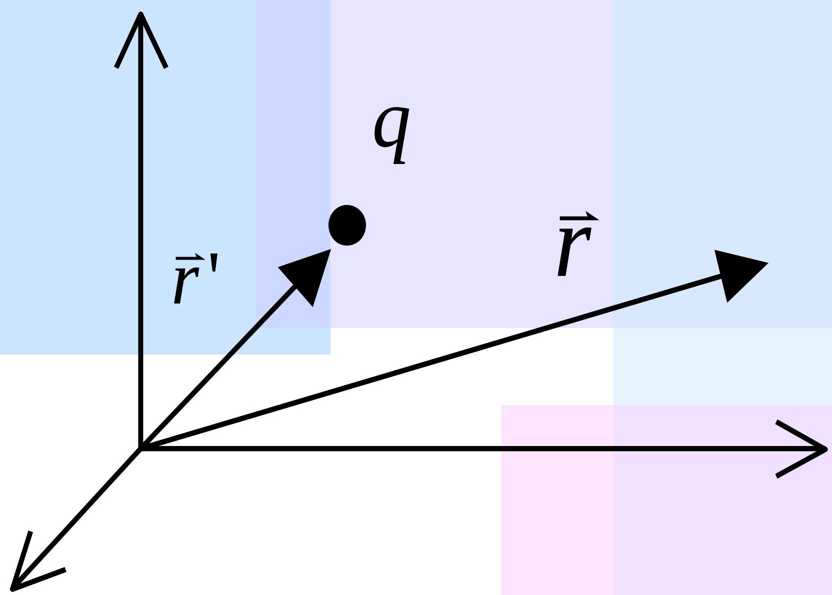
Función potencial eléctrico requiere de una referencia para su definición V(r= r_A) = 0

Definición de potencial

Sistema de referencia con origen en carga

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} \|}$$

Sistema de referencia cualquiera



$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|}$$

V es una función lineal con la carga, luego cumple con superposición

Definición de potencial

Para sistema de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_1 \|} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_2 \|} + \ldots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_n \|}$$

$$\Rightarrow \quad V(\vec{r}) = \sum \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} - \vec{r}_k \|}$$

Para distribuciones continuas de cargas

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{dq'}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|}$$

Relaciones entre campo eléctrico y potencial

$$V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Tomando A como referencia y haciendo B variable

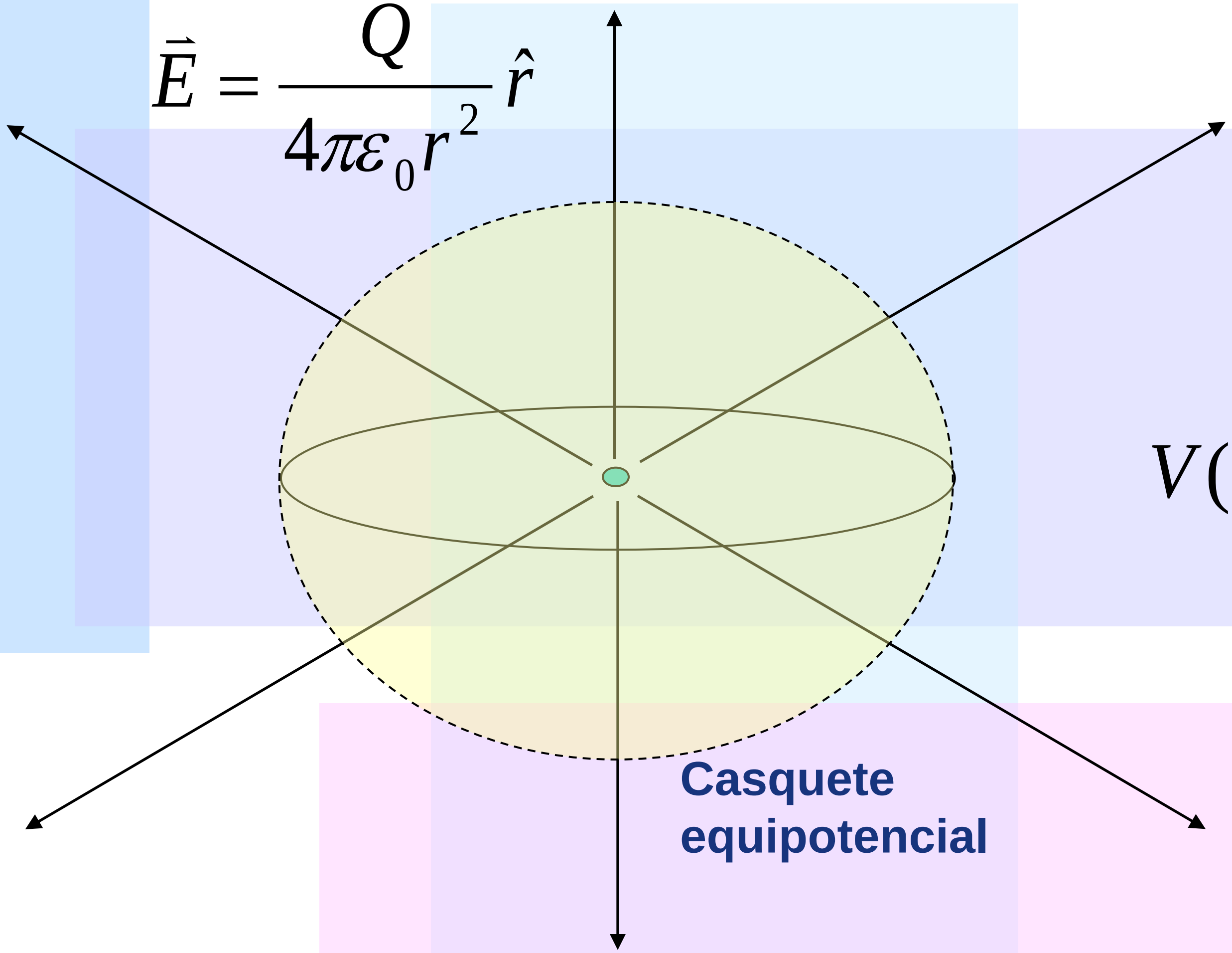
$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref}$$

Luego

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Campo eléctrico y potencial de carga

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

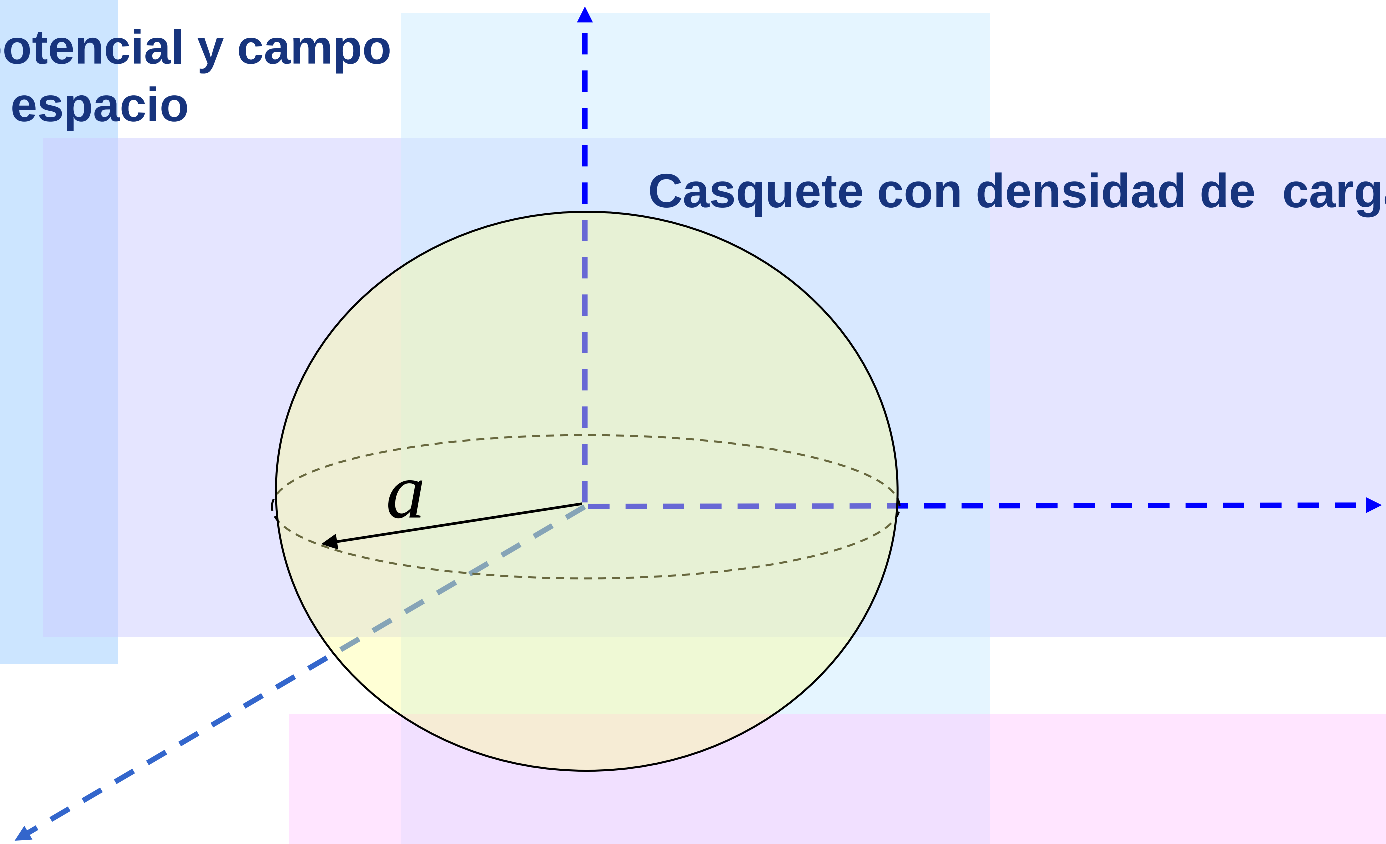


$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

Casquete con densidad de carga σ

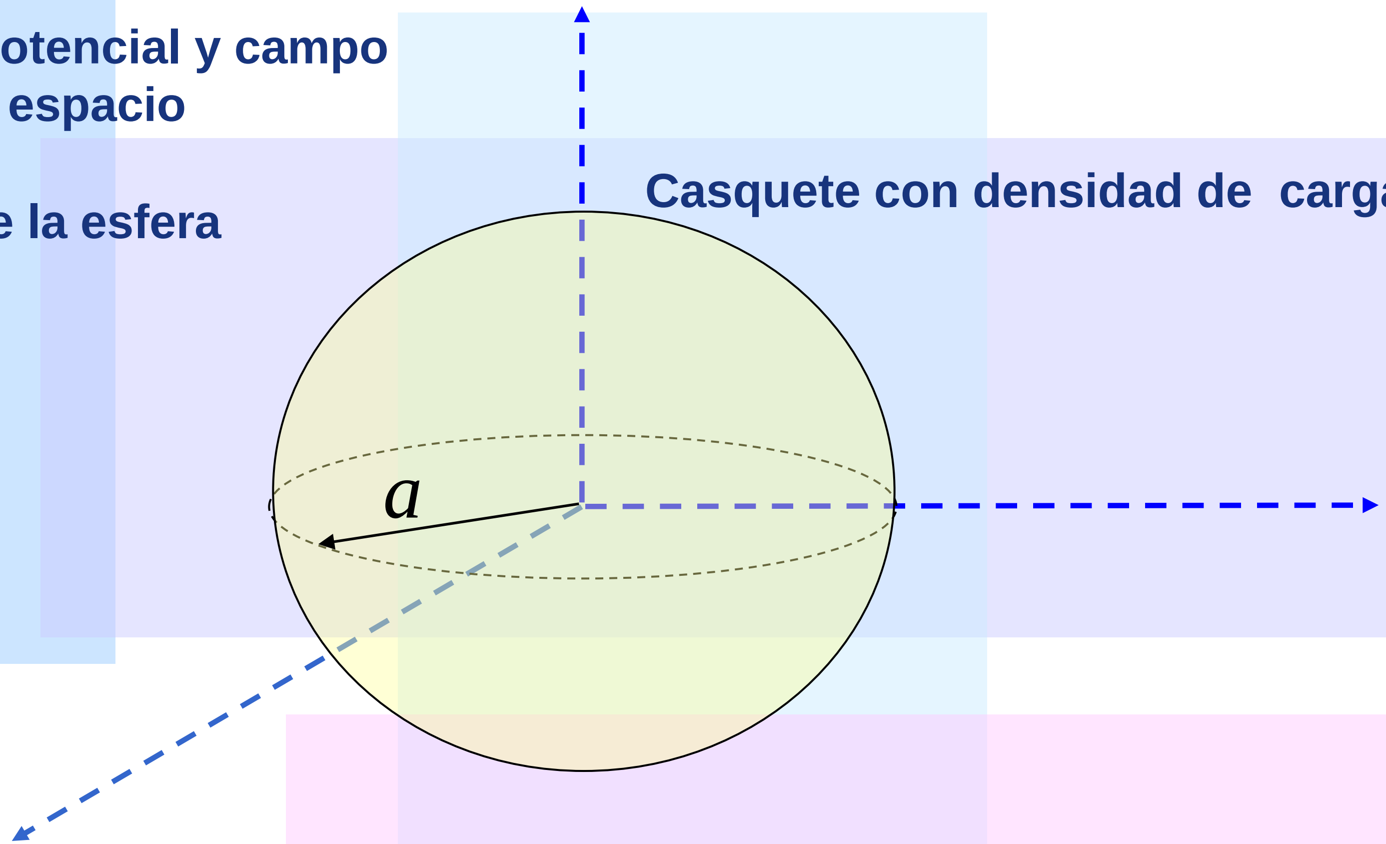


Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

I. Fuera de la esfera

Casquete con densidad de carga σ

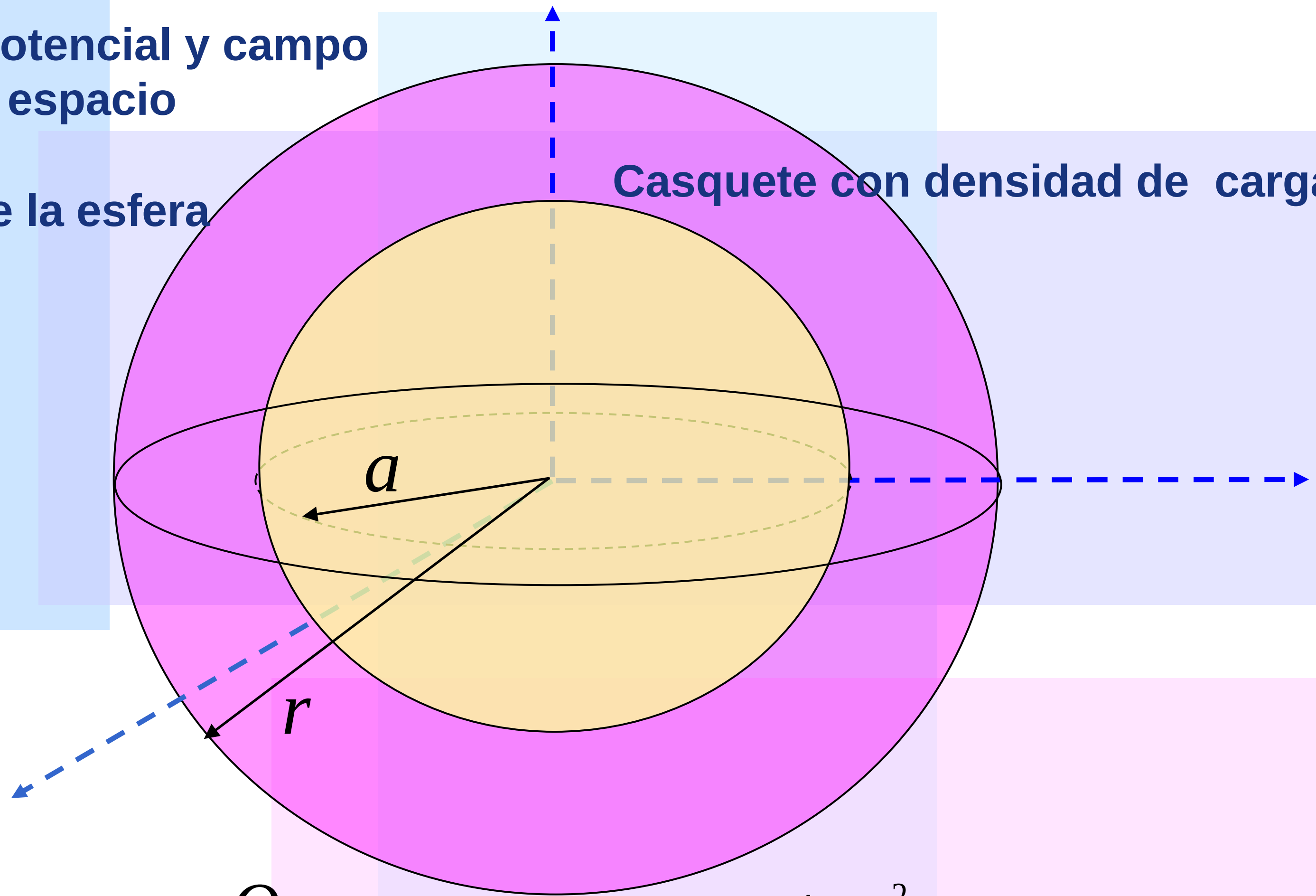


Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

I. Fuera de la esfera

Casquete con densidad de carga σ



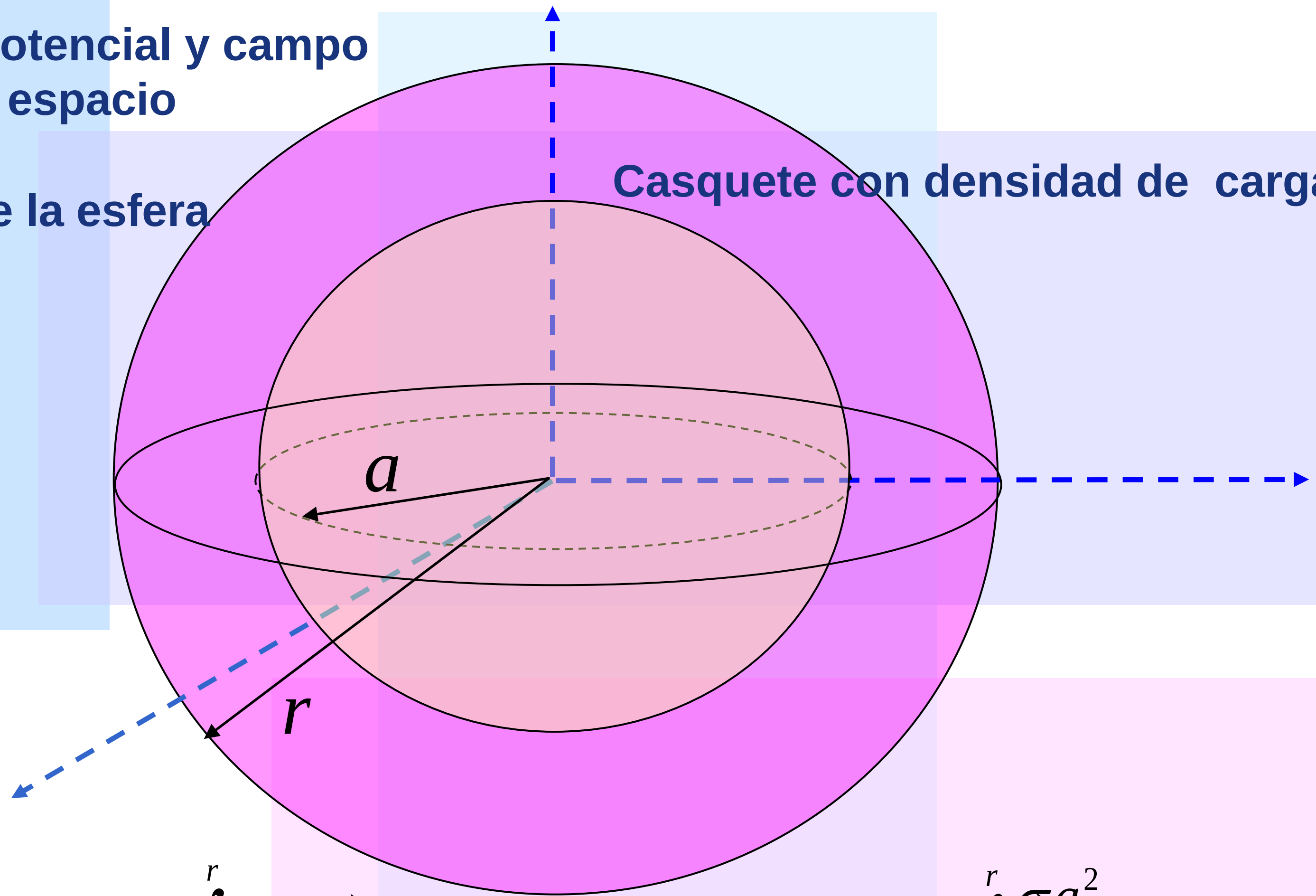
$$\oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_T}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{4\pi a^2 \sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{a^2 \sigma}{\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

I. Fuera de la esfera

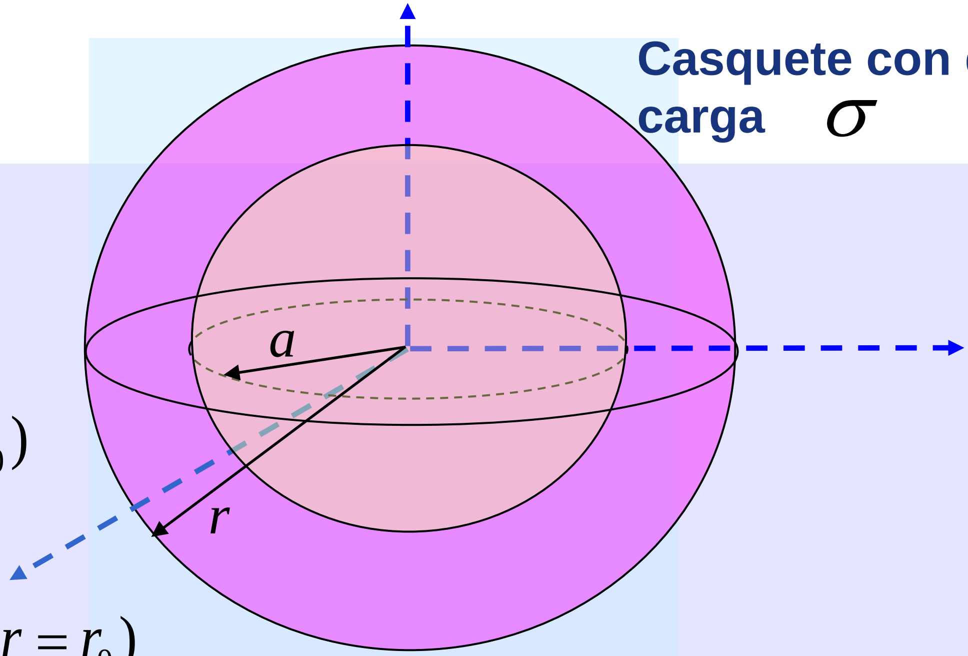
Casquete con densidad de carga σ



$$V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \vec{E} \bullet d\vec{l} + V_{ref} \Rightarrow V(\vec{r}) = -\int_{ref}^{r} \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} \hat{r} \bullet dr\hat{r} + V_{ref}$$

Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Casquete con densidad de carga σ



I. Fuera de la esfera

$$V(\vec{r}) = \left.\frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r}\right|_{r_0}^{r} + V_{ref}(r = r_0)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r} - \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r_0} + V_{ref}(r = r_0)$$

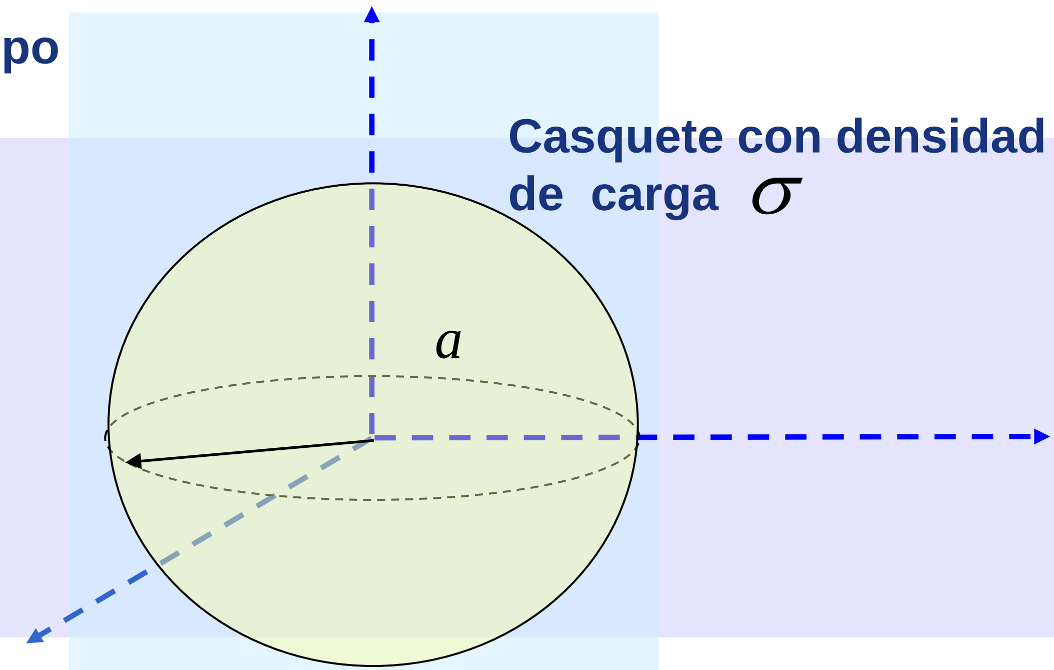
Tomando como referencia el infinito, es decir, $V_{ref}(r = r_0 \to \infty) = 0$

$\Rightarrow$ $V(\infty) = +0 - 0 + V_{ref} = 0$ $\Rightarrow$ $V(\vec{r}) = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r}$

Ejemplo Campo eléctrico y potencial de casquete

Calcular potencial y campo en todo el espacio

II. Dentro de la esfera



Casquete con densidad de carga σ

Al interior el campo es nulo y el potencial es constante. Así para $\|\vec{r}\| \leq a$

$$V(\vec{r}=a) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 a} = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(\|\vec{r}\| \leq a) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0\hat{r}}$$

Notar que se escoge una y sólo una referencia para el potencial en todo el espacio. Además el potencial es continuo mientras que el campo no lo es.

ECUACION DE LAPLACE

Teníamos

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Tomando la divergencia

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\nabla \bullet \vec{E}(\vec{r})$$

Usando la 1ª ecuación de Maxwell

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \bullet (\nabla V(\vec{r})) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Ecuación de Poisson

ECUACION DE LAPLACE

Si no hay cargas:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

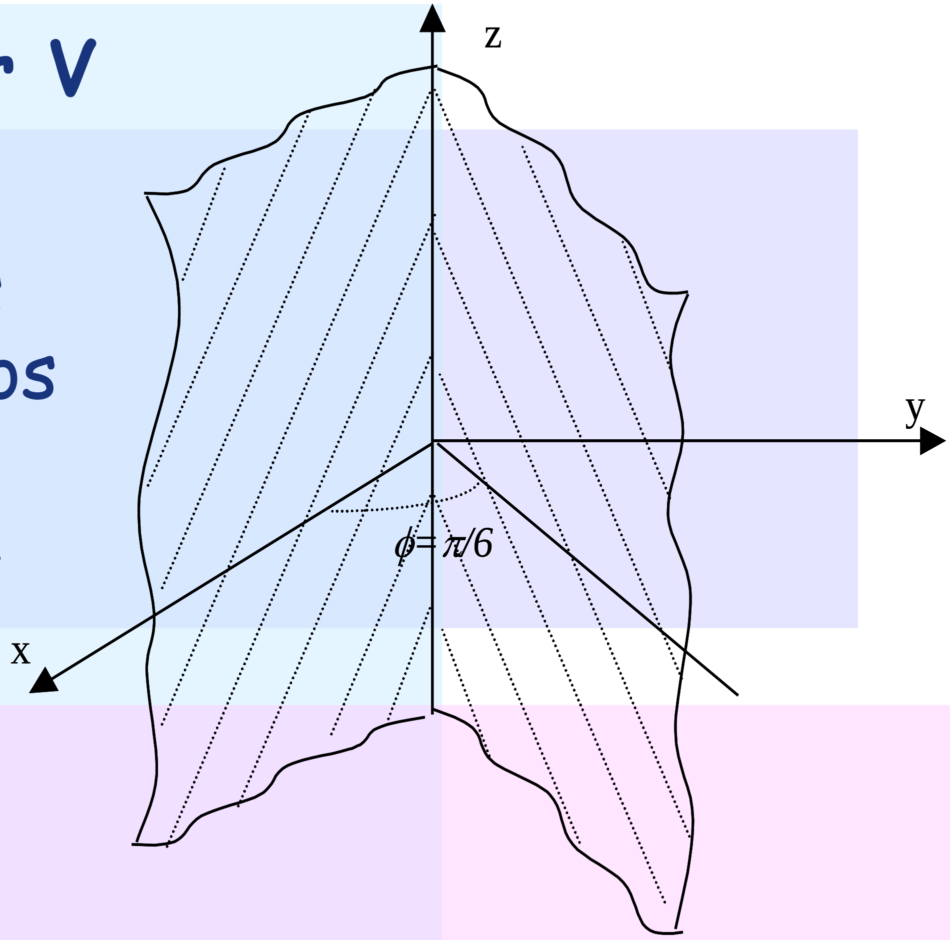
Ecuación de Laplace.

- Es la más usada en la práctica para determinar el campo eléctrico
- Para resolverla se requieren condiciones de borde

ECUACION DE LAPLACE

EJEMPLO 12.Calcular V

Se sabe que el potencial en los planos semi-infinitos definidos por $V(\phi=0, \rho, z) = 0$ y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100$ V.

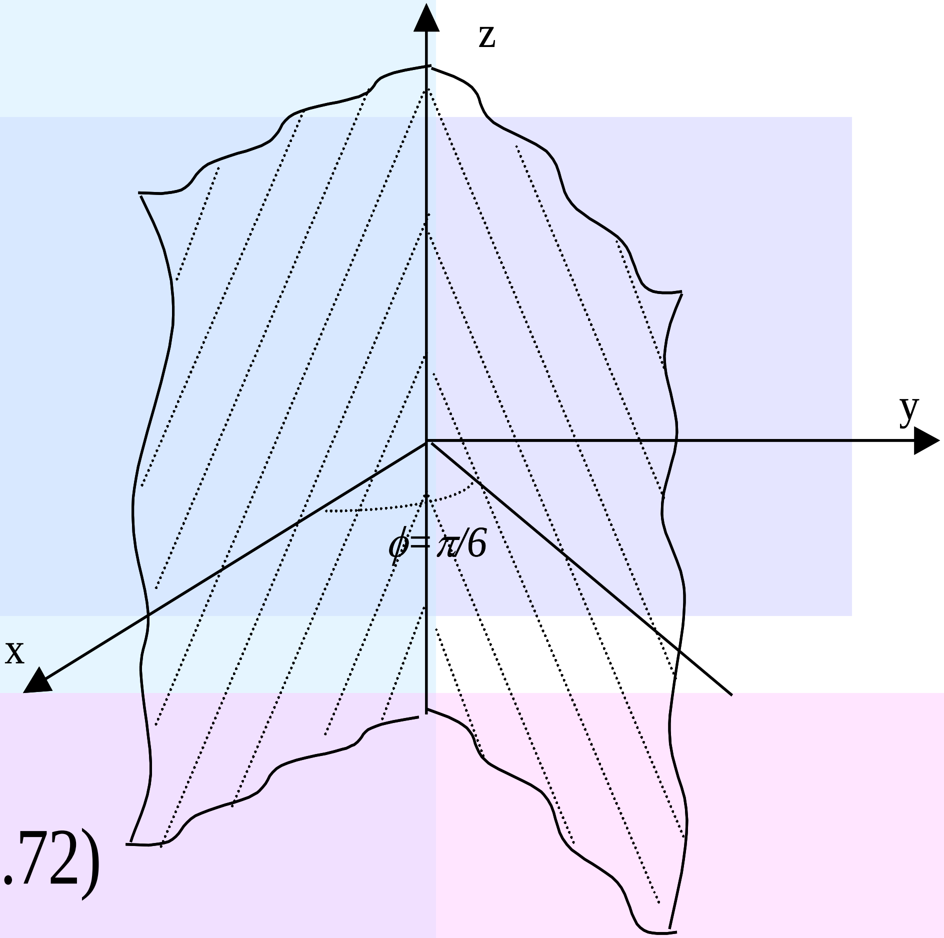


Ejemplo

Sol^n

Hay que darse cuenta que **V** sólo dependen de **ϕ**

Sólo interesa una coordenada del laplaciano **(ϕ)**



$$\nabla^2 V(\vec{r}) = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.72)$$

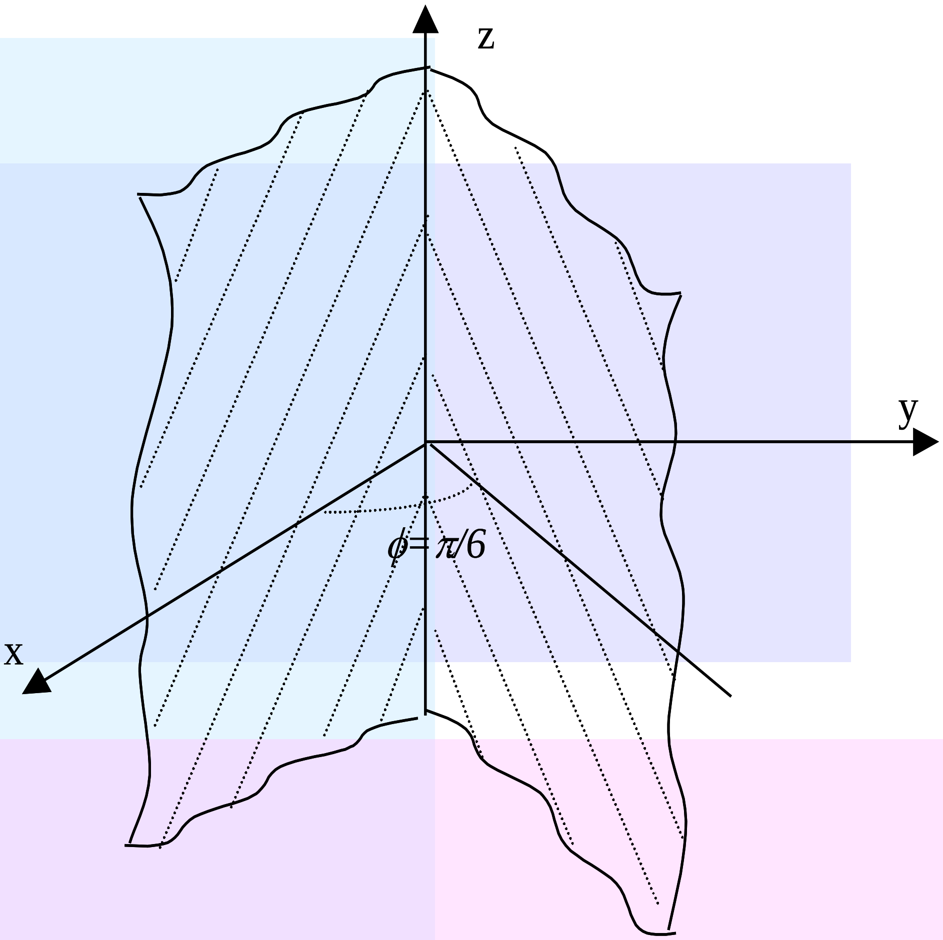
Ejemplo

Luego

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.73)$$

Cuya solución es

$$V = A\phi + B$$



Ejemplo

Condiciones de borde:

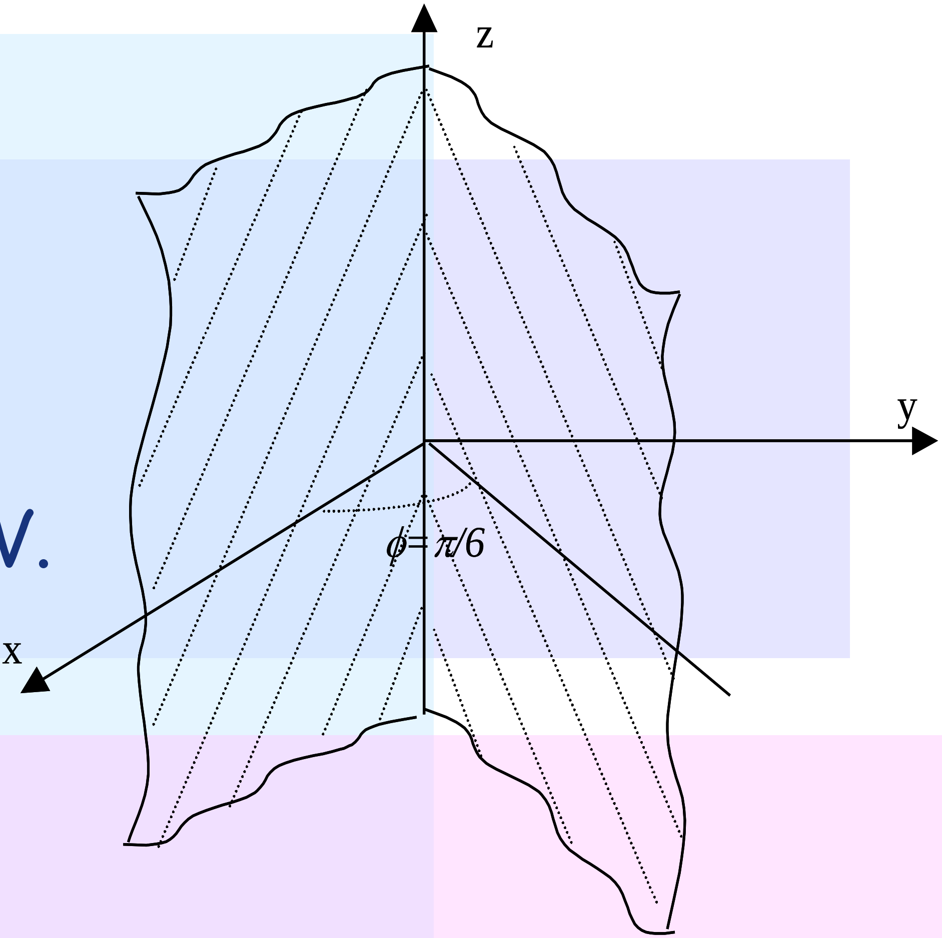
$V(\phi=0, \rho, z) = 0$

$\Rightarrow$ $B=0$

y $V(\phi=\pi/6, \rho, z) = 100$ V.

$\Rightarrow$ $100 = A\pi/6$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{600}{\pi}$$



Ejemplo

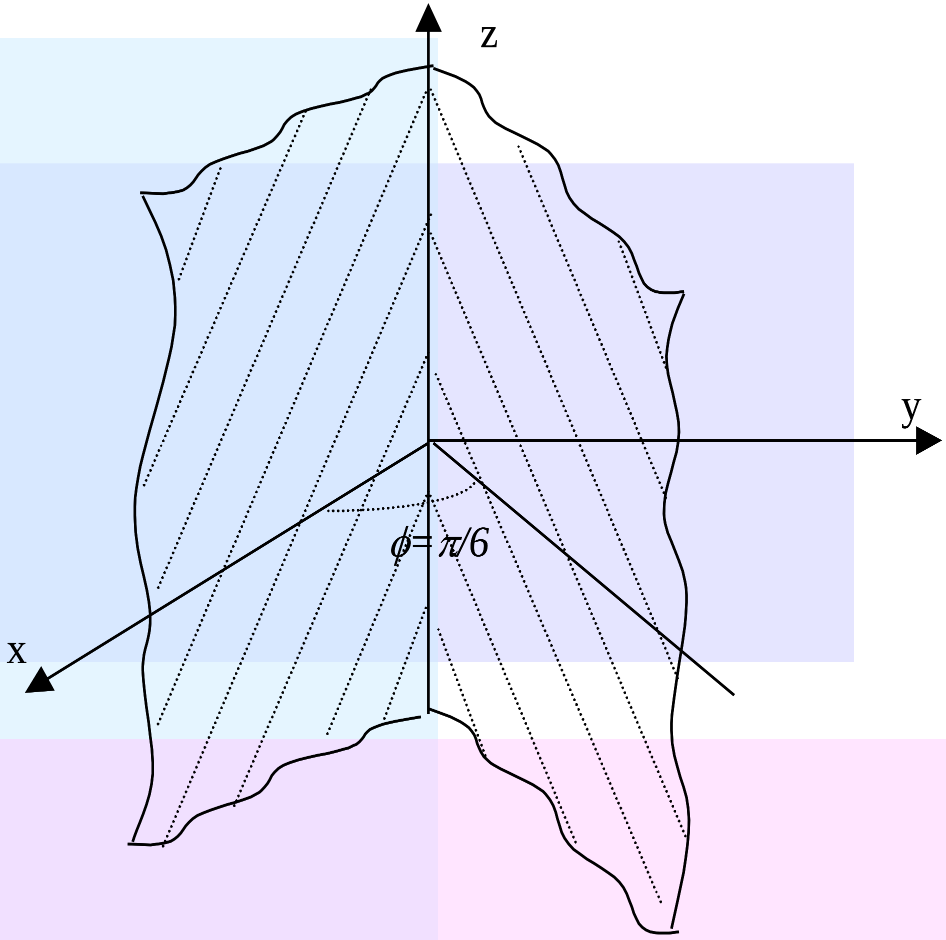
Luego el potencial es

$$V = \frac{600}{\pi}\phi$$

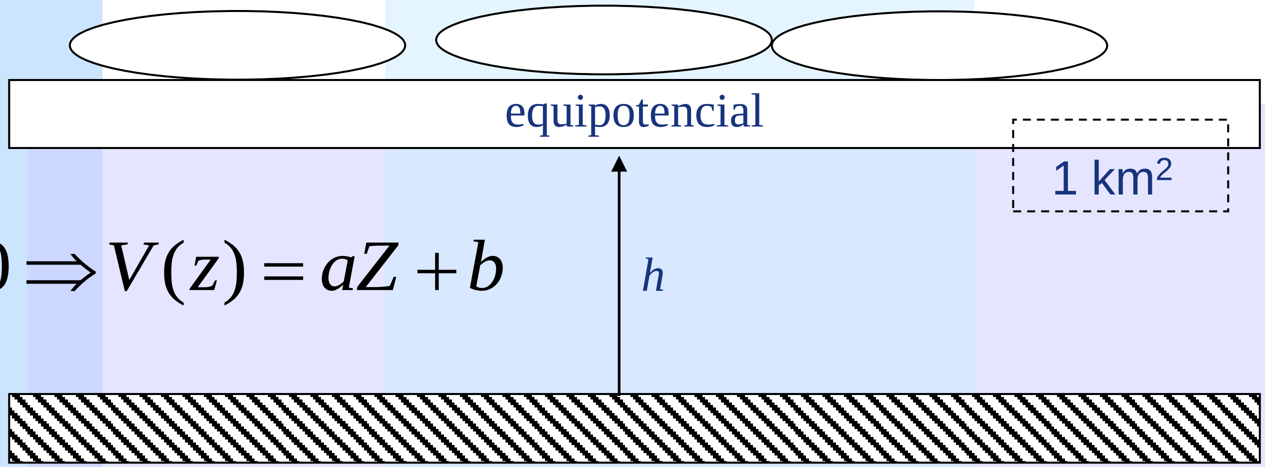
y el campo

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{600}{\pi\rho}\hat{\phi}$$



Ejemplo



$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow V(z) = aZ + b$$

Condiciones de Borde

$$\left.\begin{array}{l} V(z=0)=0 \quad y \\ V(z=1)=5 \end{array}\right\} \therefore V(z)=5z$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = -5\hat{k} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = -10\varepsilon_0 \hat{k}$$

Campo Eléctrico Conservativo

Previa: Si $f(\vec{r})$ Es un campo escalar, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

luego, tomando el rotor de la ecuación

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Campo Eléctrico Conservativo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Integrando en S

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Donde C(S) es el contorno que limita a la superficie S

Campo Eléctrico Conservativo

Luego

$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \bullet d\vec{l} = Wneto = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.

Campo Eléctrico Conservativo

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}\|^2}\hat{r}$$

Trabajo neto nulo en trayectoria cerrada