Mecánica

Ejercicio N°6

Semestre: Primavera 2010

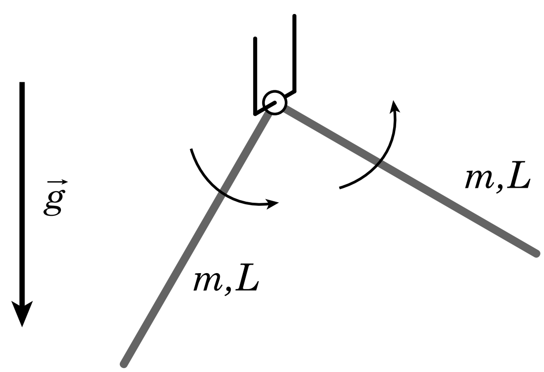
Profesor: Claudio Romero

Auxiliares: Ignacio Ortega y Francisco Sepúlveda

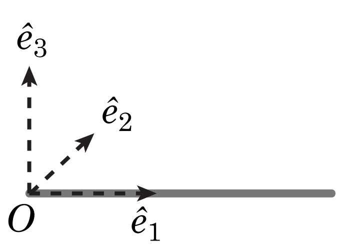
Una barra rígida de masa 2m, largo 2L y grosor despreciable se dobla en ángulo recto justo en su punto medio y se le hace una perforación para sujetarla a un eje perpendicular a ambos segmentos de la barra. construyéndose así un péndulo plano.

a) Utilizando el Principio de superposición, encontrar la matriz de inercia del sistema en un sistema de ejes conveniente.

b) Escriba la ecuación del movimiento del sistema y la frecuencia de pequeñas oscilaciones



Indicación: considere la matriz de inercia de una barra delgada de masa m y largo L en un sistema con centro en un extremo de la barra y con uno de los ejes solidario a ella:



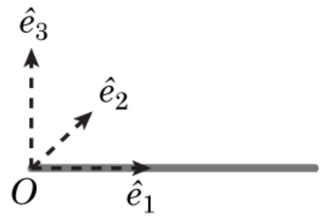
$$\mathbb{I}^{(O)}_{\{\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3\}} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pauta Ejercicio N°6

Parte (a)

La matriz de inercia de una barra según un sistema de ejes con centro en uno de sus extremos y con uno de sus ejes solidario a ella es:

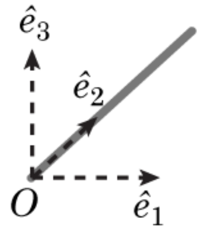
$$\mathrm{I}_{\{\hat{e}_2,\hat{e}_2,\hat{e}_2\}}^{(O)} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Es natural que $I_{11} = 0$: la barra no opone resistencia al girarla en torno al eje $\hat{e}_1$ (o sea, su eje de simetría), ya que tiene grosor despreciable y las partículas que componen la barra están todas "muy cerca" del eje.

La matriz de inercia de un sólido depende del sistema de ejes según el cual se defina: depende tanto del centro del sistema como de la orientación de los ejes. Si se cambia la barra y se pone a lo largo del eje $\hat{e}_2$, la nueva matriz de inercia es:

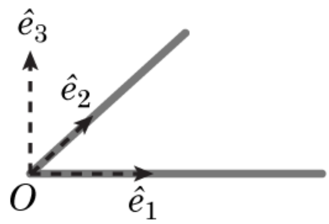
$$\mathrm{I}_{\{\hat{e}_2,\hat{e}_2,\hat{e}_2\}}^{(O)} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ya dijimos que la barra no opone resistencia a que se gire en torno a su propio eje (Que ahora es $\hat{e}_2$). Es decir, $I_{22} = 0$.

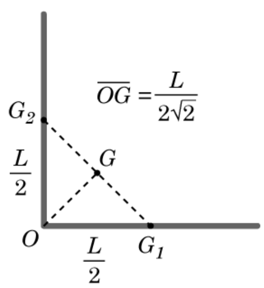
Considerando ahora el sistema compuesto, si tomamos un sistema de ejes centrado en el doblez, con ejes $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ solidarios a cada mitad de la barra, la matriz de inercia es la suma de las matrices anteriores:

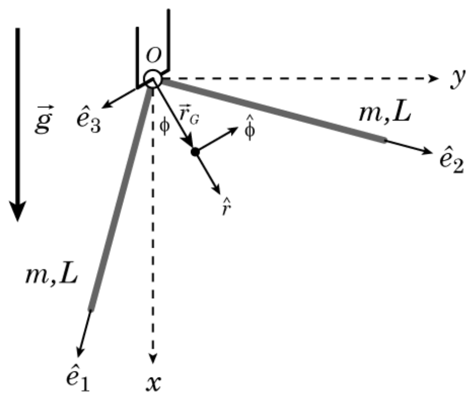
$$\mathbb{I}_{\{\hat{e}_2,\hat{e}_2,\hat{e}_2\}}^{(O)} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Parte (b)

Consideremos ahora un sistema inercial con centro en el punto de apoyo del péndulo, el eje x apuntando hacia abajo y el eje y apuntando hacia la derecha. Vamos a caracterizar con coordenadas polares la posición del centro de masa del sistema, el cual es el punto medio del centro de masa ambas barras, ya que son iguales. Este punto está a lo largo de la bisectriz entre las dos barras, a distancia $\frac{L}{2\sqrt{2}}$ del origen:





$$\vec{r}_G = \frac{1}{2\sqrt{2}} L\hat{r}, \qquad \vec{v}_G = \frac{1}{2\sqrt{2}} L\dot{\phi}\hat{\phi}, \qquad \vec{a}_G = \frac{1}{2\sqrt{2}} L(-\dot{\phi}^2\hat{r} + \ddot{\phi}\hat{\phi})$$

Con esto, el vector velocidad angular es $\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} = \dot{\phi}\hat{e}_3$

La relación entre el sistema de ejes $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ (no inercial) y los vectores unitarios $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ del sistema inercial es no trivial, pero de todos modos es claro que $\hat{e}_3 = \hat{z}$.

Escribimos ahora el momento angular:

$$\vec{\ell}^{(O)} = \mathbb{I}^{(O)}_{\{\hat{e}_2, \hat{e}_2, \hat{e}_2\}} \cdot \vec{\omega} = \frac{mL^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} mL^2\dot{\phi}\hat{e}_3 = \frac{2}{3} mL^2\dot{\phi}\hat{z}$$

Y la energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}\,\vec{\ell}^{(O)} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{3} mL^2\dot{\phi}^2$$

La energía cinética se puede separar en componentes traslacional y rotacional, pero esta vez no es necesario.
La energía potencial gravitatoria es:

$$U = -2m \cdot g \cdot x_G = -\frac{1}{\sqrt{2}} mgL\cos(\phi)$$

Y la energía mecánica total del sistema:

$$E = K + U = \frac{1}{3} mL^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} mgL\cos(\phi)$$

Además de la gravedad, la única fuerza externa ejercida sobre el sistema es la normal del soporte, la cual no trabaja. Por tanto, se conserva la energía del sistema:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} mL^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{1}{\sqrt{2}} mgL\sin(\phi)\,\dot{\phi} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ddot{\phi} = -\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{L}\sin(\phi)$$

La ecuación del movimiento es análoga a la del péndulo simple. Claramente $\phi = \pi$ es punto de equilibrio estable y $\phi = -\pi$ es equilibrio inestable. La frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a $\phi = \pi$ es

$$\Omega_{\text{P.O.}} = \sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{g}{L}}$$

Existen varias maneras de resolver el problema. Se puede usar la ecuación $\dot{\vec{\ell}}^{(O)} = \vec{\mathcal{T}}^{(O)}_{m\vec{g}}$ (La normal no hace torque). Además, se puede caracterizar la posición del punto extremo de una de las barras en lugar del centro de masa: sería $\vec{r}_1 = L\hat{r}$, mientras que la posición del extremo de la otra barra sería $\vec{r}_2 = L\hat{\phi}$. Claro que ahora, el punto de equilibrio estaría en 45º en lugar de 0º, pero la frecuencia de pequeñas oscilaciones sería la misma.

Puntaje:

Punto base:	1.0 punto
Encontrar la matriz de inercia del sistema:	2.0 puntos
Encontrar la ecuación del movimiento:	3.0 puntos
Encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones:	1.0 punto
Total:	7.0 puntos