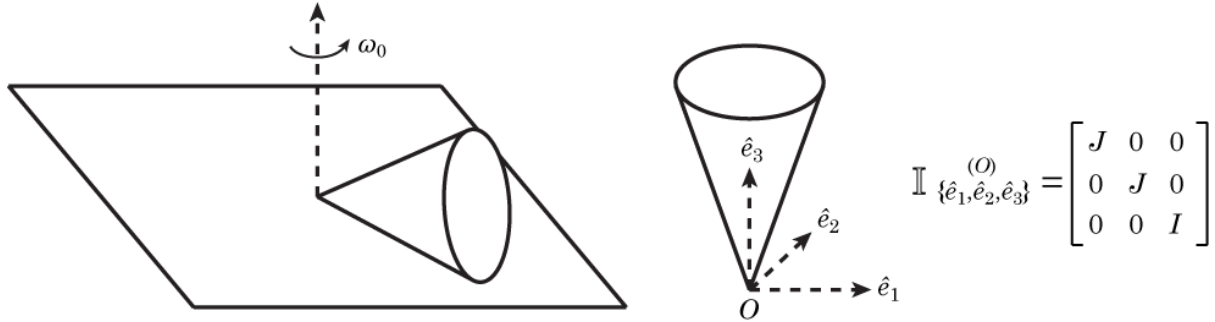


Problema 1

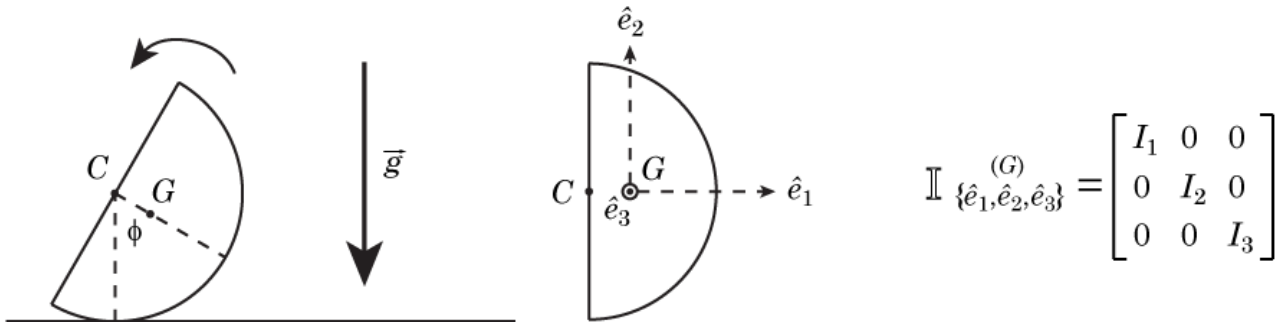
Un cono de semiángulo α y generatriz de largo L está apoyado en una superficie plana y rueda sin resbalar a frecuencia constante ω_0 como muestra la figura. Encuentre el momento angular y la energía cinética del cono. Los momentos principales de inercia del cono con respecto a la punta son J , J e I .



Problema 2

Un semidisco de radio R y grosor h puede rodar sin resbalar sobre una superficie plana. La distancia entre el centro C de lo que sería el disco completo y el centro de masa G es L . Los momentos principales de inercia del disco son I_1 , I_2 e I_3 .

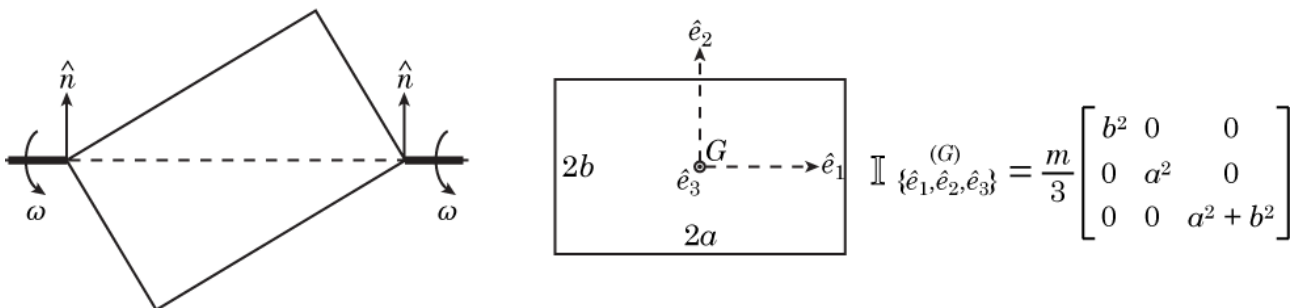
- Encuentre la ecuación del movimiento del disco en términos del ángulo ϕ .
- Encuentre la fuerza normal y el roce estático en términos de ϕ , su derivada, y la energía.



Problema 3

Una placa rectangular de masa m , lados $2a$ y $2b$ y espesor despreciable gira con velocidad angular constante ω según un eje que pasa por la diagonal del rectángulo. No hay gravedad.

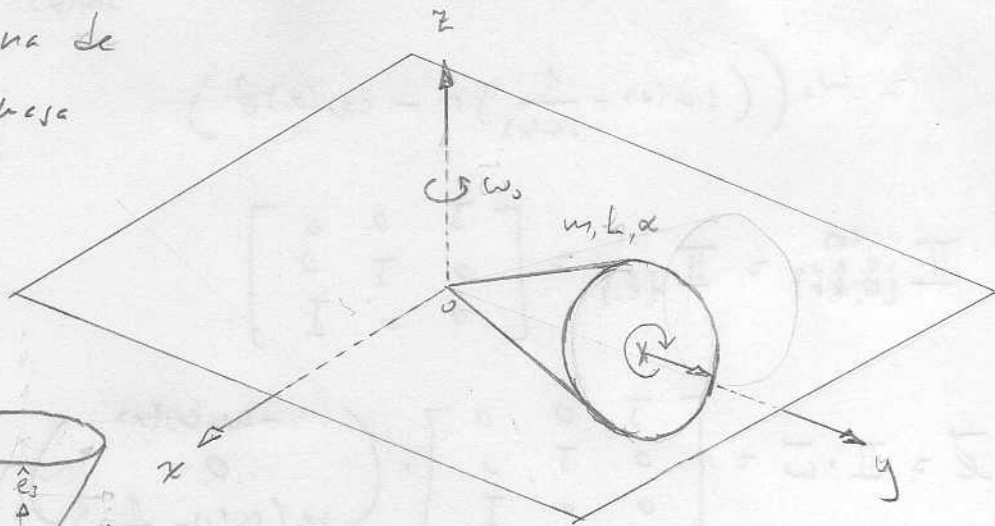
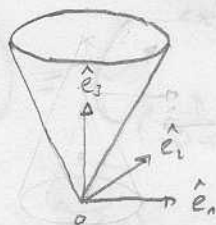
- Encuentre el momento angular del cono, su derivada y la energía cinética. Discuta el caso $a=b$.
- Encuentre las fuerzas que ejercen los soportes que sujetan la placa y la hacen girar. Estas fuerzas tienen la forma $\vec{F}_1 = F_1 \hat{n}$ y $\vec{F}_2 = F_2 \hat{n}$, con $\hat{n}$ vector coplanar al rectángulo y perpendicular al eje de rotación.



P1 Un cono rueda sin resbalar sobre una superficie plana de modo que su centro de masa se mueve en M.C.V. a velocidad angular ω_0

Calcular h y $\vec{L}$

$$\mathbb{I}_{\hat{e}}^{(\omega)} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$



Sol: $K = K_T + K_R = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}$

$$K_T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_C|^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} \vec{L}^{(\omega)} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega}$$

Centro de masa en coordenadas esféricas $\{\hat{r}, \theta, \hat{\phi}\}$

$$\vec{r}_C = h \hat{r}, \quad \vec{v}_C = h \dot{\phi} \sin(\theta) \hat{\phi} = h \omega_0 \cos(\alpha) \hat{\phi}$$

$$\vec{\omega} = \omega_0 \hat{z} + \omega_1 \hat{r} = (\omega_0 \sin(\alpha) + \omega_1) \hat{\phi}$$

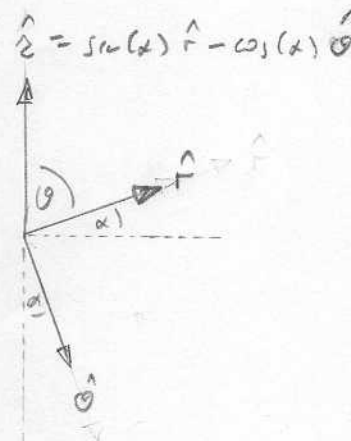
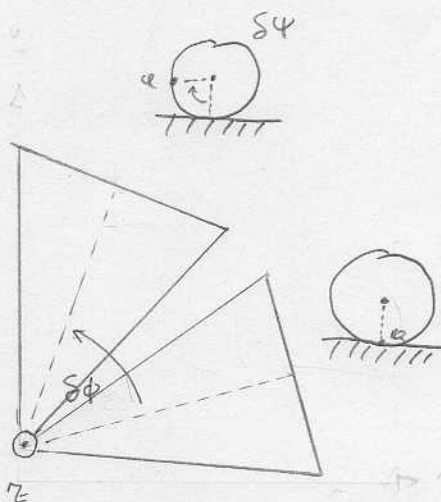
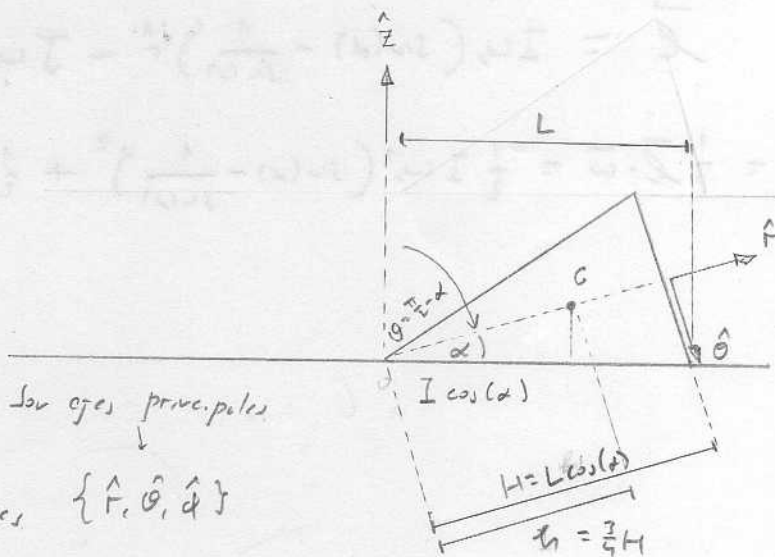
Si el eje del cono rota en $\delta\phi$, ¿cuánto rota el cono sobre su propio eje? $\delta\psi = ?$

$$L \delta\phi = -\tau \delta\psi = -L \sin(\alpha) \delta\psi$$

$$\delta\phi = -\delta\psi \sin(\alpha)$$

Dividiendo por δt :

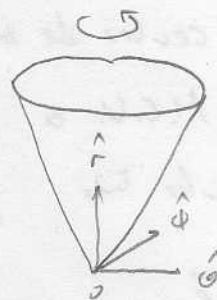
$$\omega_0 = -\omega_1 \sin(\alpha) \Rightarrow \omega_1 = -\frac{\omega_0}{\sin(\alpha)}$$



$$\vec{\omega} = \omega_2 \hat{z} + \omega_1 \hat{r} = \omega_2 (\sin(\alpha) \hat{r} - \cos(\alpha) \hat{\theta}) - \frac{\omega_2}{\sin(\alpha)} \hat{r}$$

$$= \omega_2 \left(\left(\sin(\alpha) - \frac{1}{\sin(\alpha)} \right) \hat{r} - \cos(\alpha) \hat{\theta} \right)$$

$$\mathbb{I}^{(\omega)}_{\{\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{r}\}} = \mathbb{I}^{(\omega)}_{\{\hat{e}_i\}} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$



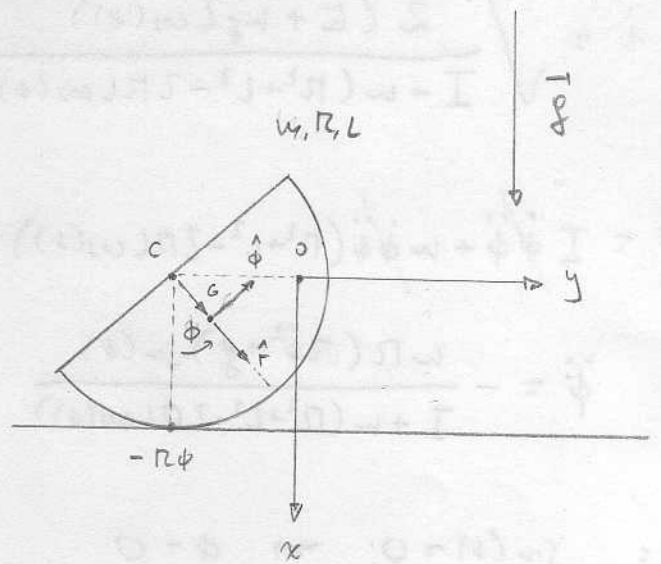
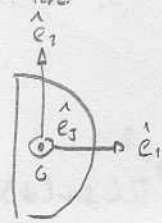
$$\vec{L} = \mathbb{I} \cdot \vec{\omega} = \begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\omega_2 \cos(\alpha) \\ 0 \\ \omega_2 \left(\sin(\alpha) - \frac{1}{\sin(\alpha)} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J \omega_2 \cos(\alpha) \\ 0 \\ I \omega_2 \left(\sin(\alpha) - \frac{1}{\sin(\alpha)} \right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = I \omega_2 \left(\sin(\alpha) - \frac{1}{\sin(\alpha)} \right) \hat{r} - J \omega_2 \cos(\alpha) \hat{\theta} //$$

$$K = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I \omega_2^2 \left(\sin(\alpha) - \frac{1}{\sin(\alpha)} \right)^2 + \frac{1}{2} J \omega_2^2 \cos^2(\alpha) //$$

P/ Encontrar $\omega_{p.a}$, $\vec{N}$, $\vec{f}_{n.e}$

$$\mathbb{I}^{(G)}_{\{\hat{e}\}} = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{bmatrix}$$



Sol:1 Fuerzas:

$$m\vec{g} = mg\hat{x} \rightarrow U = -mgx \quad \text{conservativa}$$

$$\vec{N} = -N\hat{x}, \quad N \geq 0$$

$$\vec{f}_{n.e} = f\hat{y}, \quad f \geq 0$$

No trabaja: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$$\vec{r}_G = \vec{OC} + \vec{CG} = -R\phi\hat{y} + L\hat{r}$$

$$\vec{v}_G = -R\dot{\phi}\hat{y} + L\dot{\phi}\hat{\phi} = \dot{\phi}(-R\hat{y} + L\hat{\phi})$$

$$\vec{a}_G = -R\ddot{\phi}\hat{y} + L(-\dot{\phi}^2\hat{r} + \ddot{\phi}\hat{\phi})$$

$$E = K + U = K_T + K_R + U_F$$

$$U_F = +mgx = -mgL\cos(\phi)$$

$$K_T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_G|^2 = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2(R^2 + L^2 - 2RL\hat{y} \cdot \hat{\phi}) = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2(R^2 + L^2 - 2RL\cos(\phi))$$

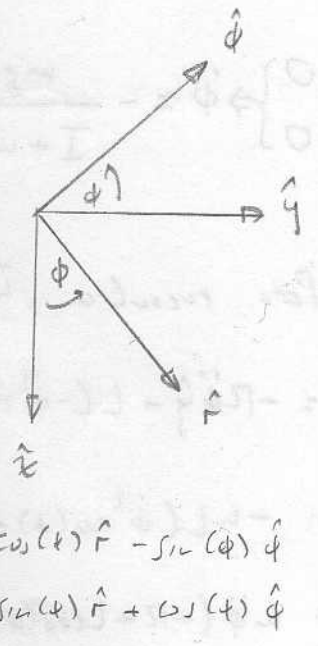
$$K_R = \frac{1}{2}\vec{L}^{(G)} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\hat{z} \quad \vec{L}^{(G)} = \mathbb{I}^{(G)} \cdot \vec{\omega} = I_3\dot{\phi}\hat{z} = I\dot{\phi}\hat{z} \quad (\text{Abuso de notaci3n})$$

Obs: $\{\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z}\}$ son los ejes principales

$$K_R = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2$$

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2(R^2 + L^2 - 2RL\cos(\phi)) - mgL\cos(\phi)$$



$$\hat{x} = \cos(\phi)\hat{r} - \sin(\phi)\hat{\phi}$$

$$\hat{y} = \sin(\phi)\hat{r} + \cos(\phi)\hat{\phi}$$

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2(E + mgl \cos(\phi))}{I + m(R^2 + L^2 - 2RL \cos(\phi))}}$$

$$\frac{dE}{dt} = I \dot{\phi} \ddot{\phi} + m \dot{\phi} \ddot{\phi} (R^2 + L^2 - 2RL \cos(\phi)) + m \dot{\phi}^2 RL \sin(\phi) + mgl \dot{\phi} \sin(\phi) = 0$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{mR(R\ddot{\phi}^2 + g) \sin(\phi)}{I + m(R^2 + L^2 - 2RL \cos(\phi))}$$

$$Eq: \sin(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi \approx 0 \\ \dot{\phi} \approx 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{\phi} \approx -\frac{mglR}{I + m(R-L)^2} \quad \omega_{p,0} = \sqrt{\frac{mgl}{I + m(R-L)^2}}$$

Para encontrar $\vec{U}$, $\vec{F}_{nc}$ usamos $\vec{F}_{ext} = m\vec{a}_c$

$$\vec{a}_c = -R\dot{\phi}\hat{y} + L(-\dot{\phi}^2\hat{r} + \ddot{\phi}\hat{\phi}) = -L(\dot{\phi}^2\cos(\phi) + \ddot{\phi}\sin(\phi))\hat{x} + (-R\dot{\phi} + L(-\dot{\phi}^2\sin(\phi) + \ddot{\phi}\cos(\phi)))\hat{y}$$

$$(x): -mL(\dot{\phi}^2\cos(\phi) + \ddot{\phi}\sin(\phi)) = mgl - N \Rightarrow N = mgl + mL(\dot{\phi}^2\cos(\phi) + \ddot{\phi}\sin(\phi))$$

$$(y): m\dot{\phi}(-R + L\cos(\phi)) - mL\dot{\phi}^2\sin(\phi) = f$$