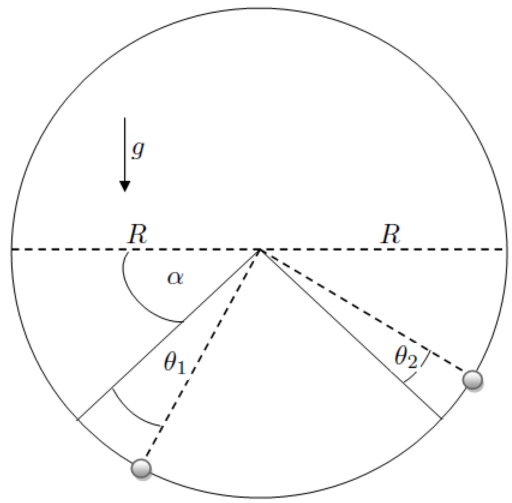
Pauta P1 Examen FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda



a) Para determinar el valor del largo natural con la condición dada (equilibrio en $\alpha = \pi/4$), se tiene que la suma de las fuezas en las partículas debe ser nula. Con esto, se puede ver que por simetria del sistema, al lado derecho también se deben tener $\pi/4$ como ángulo, lo que hace concluir que el ángulo entre los dos puntos de equilibrio debe ser $\pi/2$. De esta forma, el equilibrio de fuerzas en cualquiera de las dos partículas es

$$mg\sin(\frac{\pi}{4}) = k(R\frac{\pi}{2} - \ell_o)$$

$$\boxed{\ell_o = R\frac{\pi}{2} - \frac{mg}{k\sqrt{2}}}$$

b) Se usa el vector de coordenadas generalizadas

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

de esta forma, la energia cinética y la matriz M es

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)$$

$$M = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2 \end{bmatrix}$$

la energía potencial del sistema está dada por la gravitación y por el resorte (se coloca el nivel de referencia de la gravitación en el diámetro del anillo de radio R)

$$U_{grav} = -mgR(\cos(\alpha + \theta_1) + \cos(\alpha + \theta_2))$$

se usa $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$U_{grav} = -mgR\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

para el resorte se tiene

$$U_{resorte} = \frac{1}{2}k(R(\frac{\pi}{2} + \theta_2 - \theta_1) - \ell_o)^2$$

por lo que la energía potencial total del sistema es

$$U(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}k(R(\frac{\pi}{2} + \theta_2 - \theta_1) - \ell_o)^2 - mgR\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

Con esto se tiene

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}mgR(\cos\theta_1 - \sin\theta_1) + kR^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}mgR(\cos\theta_2 - \sin\theta_2) + kR^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = -kR^2$$

por lo que la matriz V (evaluada en el punto de equilibrio $\theta_1 = \theta_2 = 0$)

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2 \end{bmatrix}$$

por lo que la ecuaciones de movimiento quedan de la forma

$$\begin{bmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se propone la solución $\vec{q} = \vec{A}e^{i\omega t}$ y se buscan las solcuiones no triviales

$$det(-\omega^2 M + V) = 0$$

$$det(\begin{bmatrix} -\omega^2 mR^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & -\omega^2 mR^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2 \end{bmatrix}) = 0$$

$$(-\omega^2 mR^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2)^2 - (kR^2)^2 = 0$$

$$(-\omega^2 mR^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2) = \pm kR^2$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{R} + \frac{k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

por lo que las frecuencias de oscilaciones pequeñas son

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{R}}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{R} + 2\frac{k}{m}}$$

se buscan ahora los modos normales de oscilación.
Para ω_1

$$\begin{bmatrix} kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & kR^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

es decir, para la frecuencia ω_1 se tiene un movimiento en fase.
Para ω_2 se tiene

$$\begin{bmatrix} -kR^2 & -kR^2 \\ -kR^2 & -kR^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

es decir, para la frecuencia ω_2 se tiene un movimiento en contra fase.
c) Notemos que la expresión matricial arroja dos ecuaciones de movimiento.

$$mR^2\ddot{\theta}_1 + (\frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2)\theta_1 - kR^2\theta_2 = 0$$

$$mR^2\ddot{\theta}_2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2)\theta_2 - kR^2\theta_1 = 0$$

si por un lado sumamos ambas ecuaciones, se tiene

$$mR^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + (\frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2)(\theta_1 + \theta_2) - kR^2(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

y si por otro lado las restamos, se tiene que

$$mR^2(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + (\frac{\sqrt{2}}{2}mgR + kR^2)(\theta_1 - \theta_2) + kR^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

se hace el cambio de variables $\xi_1 = \theta_1 + \theta_2$ y $\xi_2 = \theta_1 - \theta_2$ se llegan a las siguientes ecuaciones

$$\ddot{\xi}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{R}\xi_1 = 0$$

$$\ddot{\xi}_2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{g}{R} + 2\frac{k}{m})\xi_2 = 0$$

la cuales son ecuaciones de osciladores armónicos. Si usamos las condiciones iniciales

$$\xi_1(t=0) = \theta_{20} \quad \xi_2(t=0) = -\theta_{20}$$

$$\dot{\xi}_1(t=0) = \dot{\xi}_2(t=0) = 0$$

se tiene que

$$\xi_1(t) = \theta_{20}\cos(\omega_1 t)$$

$$\xi_2(t) = -\theta_{20}\cos(\omega_2 t)$$

pero

$$\theta_1(t) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \quad \theta_2(t) = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}$$

por lo que

$$\boxed{\theta_1(t) = \frac{1}{2}\theta_{20}(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t))}$$

$$\boxed{\theta_2(t) = \frac{1}{2}\theta_{20}(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))}$$