# Pauta Ejercicio #7 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

22/Noviembre/2010

Se mide todo desde un SRI que es colocado en la muralla izquierda. Sea $x_1$ la distancia a la primera masa y $x_2$ la distancia a la segunda masa. Con esto, la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

para la energía potencia, podemos definir que el largo entre las tres paredes es $L$ (lo importante es que las respuestas finales no queden en función de esta constante agregada a mano), con esto, la energía potencial del sistema es

$$V = \frac{1}{2}k(x_1 - \ell_o)^2 + \frac{1}{2}(2k)(x_2 - x_1 - \ell_o)^2 + \frac{1}{2}k(L - x_2 - \ell_o)^2$$

con esto, las matrices asociadas al lagrangeano cuadratizado son

$$M = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

para la matriz $V$, calculamos el hessiano del potencial

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k(x_1 - \ell_o) - 2k(x_2 - x_1 - \ell_o) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 3k$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} = -2k$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = 2k(x_2 - x_1 - \ell_o) - k(L - x_2 - \ell_o) \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = 3k$$

el hessiano del potencial es

$$V = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix}$$

por lo que la ecuación de movimiento en matrices queda como

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \ddot{\vec{x}} + \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

se propone la solución $\vec{x} = \vec{A}e^{i\omega t}$

$$e^{i\omega t} \begin{bmatrix} -\omega^2 M + 3k & -2k \\ -2k & -\omega^2 M + 3k \end{bmatrix} \vec{A} = \vec{0}$$

se hace el determinante de la matriz igual a cero para calcular las frecuencias de oscilación

$$\omega^4 M^2 - 6Mk\omega^2 + 5k^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{6Mk \pm \sqrt{36M^2k^2 - 20M^2k^2}}{2M^2}$$

por lo que las frecuencias de pequeñas oscilaciones son

$$\boxed{\omega_1^2 = 5\frac{k}{M} \quad \omega_2^2 = \frac{k}{M}}$$

veamos las coordenadas normales para $\omega_1^2$

$$\begin{bmatrix} -2k & -2k \\ -2k & -2k \end{bmatrix} \vec{A} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{A}(\omega_1^2 = 5\frac{k}{M}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

para $\omega_2^2$

$$\begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \vec{A} = \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{A}(\omega_1^2 = \frac{k}{M}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$