Pauta Control Nº3 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

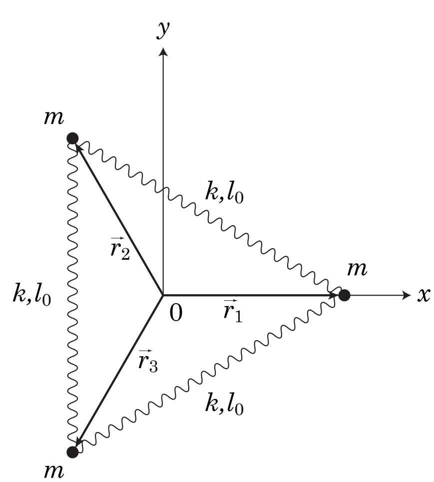
Auxiliar: Ignacio Ortega

Problema 1

Establecemos un sistema de referencia con origen en el centro de masa del sistema (la intersección de las medianas), y con el eje x sobre una de las partículas. Como no hay fuerzas externas en el problema (Salvo la gravedad y la normal de superficie, que se anulan), el centro de masa no experimenta aceleración. Dadas las condiciones iniciales en ambas partes, el centro de masa permanece en reposo.

Parte a

Dadas las condiciones iniciales, sólo cambiará la distancia de las partículas al centro de masa (siendo en todo momento las tres iguales), pero la posiciones angulares no cambiarán. Sea $\vec{r}_1 = r\hat{x}$ la posición de la partícula sobre el eje x. Sea $\vec{v}_1 = v\hat{x}$ su velocidad. Claramente, su energía cinética es $K_1 = \frac{1}{2}mv^2$. Por simetría, la energía cinética del sistema es $K = 3K_1$, pues las tres partículas tienen misma rapidez.



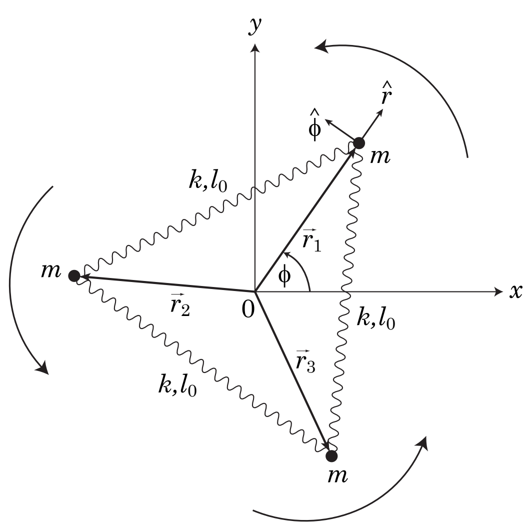
Si las tres partículas están a distancia r del centro, la geometría euclidiana permite verificar que la altura del triángulo equilátero vale $h = \frac{3}{2}r$ y sus lados miden $l = \sqrt{3}r$. Luego, la energía potencial del sistema es $U = \frac{3}{2}k(l - l_0)^2$ (se multiplica por 3 pues hay tres resortes).

La energía total de sistema es entonces: $E = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{3}{2}(\sqrt{3}r - l_0)^2$. esta cantidad es conservada.

Para encontrar la máxima expansión del sistema, igualamos la energía en dos instantes. La energía inicial es $E = \frac{3}{2}m{v_0}^2$ (no hay energía potencial). Al alcanzar la máxima expansión, las velocidades se anulan (punto de retorno); así que $E = \frac{3}{2}k(r_{max} - l_0)^2$. Igualando ambas expresiones, se encuentra que $r_{max} = l_0 + \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$.

Parte b

Dadas las nuevas condiciones iniciales, la dinámica del sistema tiene un componente rotacional. Caractericemos la posición de la partícula 1 (inicialmente sobre el eje x) con coordenadas polares: $\vec{r}_1 = r\hat{r}$. Luego, $\vec{v}_1 = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$; aunque también podemos escribir:



$\vec{v}_1 = v_r\hat{r} + v_\tau\hat{\phi}$. El momento angular de la partícula 1 se escribe: $\vec{\ell}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = mrv_\tau\hat{z}$. Es intuitivo que $\vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2 = \vec{\ell}_3$ y el momento angular del sistema vale $\vec{\ell} = 3\vec{\ell}_1 = mrv_\tau\hat{z}$.

Sobre la energía, sabemos que $E = \frac{3}{2}m({v_r}^2 + {v_\tau}^2) + \frac{3}{2}k(\sqrt{3}r - l_0)^2$ (igual que en la parte (a), salvo que ahora escribimos los componentes radial y tangencial de la velocidad).

Podemos encontrar la velocidad inicial v_0 igualando la energía y el momento angular en dos instantes: inicialmente (con las condiciones iniciales dadas en el enunciado), y cuando los lados del triángulo alcanzan su máxima expansión ($2l_0$ por enunciado): no hay velocidad radial en este instante pero sí hay velocidad tangencial v_τ.

$$E = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{3}{2}m{v_\tau}^2 + \frac{3}{2}k{l_0}^2$$

$$\ell = 3m\frac{l_0}{\sqrt{3}}v_0 = 3m\frac{2l_0}{\sqrt{3}}v_\tau$$

De la conservación de ℓ encontramos que $v_\tau = \frac{1}{2}v_0$. Reemplazando en la energía:

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{3}{2}\frac{m}{4}{v_0}^2 + \frac{3}{2}k{l_0}^2$$

De donde encontramos que $v_0 = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$.

Punto base: 1.0 pto

Parte (a): 2.0 ptos

Parte (b): 4.0 ptos

Total: 7.0 ptos