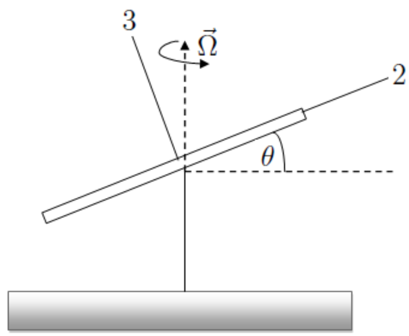
Pauta P3 C3 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda



a) Para la matriz de inercia se hace notar que la parametrización de la barra es (haciendo referencia a que el eje $\hat{e}_1$ corresponde a x', $\hat{e}_2$ corresponde a y' y $\hat{e}_3$ corresponde a z')

$$x' = z' = 0 \quad y' = \ell \;\; \ell \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$$

con esto, se tiene que

$$I_{12} = I_{13} = I_{21} = I_{22} = I_{23} = I_{31} = I_{32} = 0$$

$$I_{11} = \int \rho^2 dm$$

pero $\lambda = \frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L}$, entonces

$$I_{11} = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \ell^2 d\ell = \frac{M}{3L}(\frac{L^3}{8} - (-\frac{L^3}{8}))$$

$$I_{11} = \frac{1}{12}ML^2$$

de la misma forma

$$I_{33} = \frac{1}{12}ML^2$$

luego, la matriz de inercia es

$$\mathbf{I} = \frac{1}{12}ML^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Primero hay que encontrar el vector $\vec{\omega}$ en los ejes principales y poder ocupar las ecuaciones de Euler. Por geometria se tiene que

$$\vec{\Omega} = \Omega\sin(\theta)\hat{e}_2 + \Omega\cos(\theta)\hat{e}_3$$

si se agrega la rotación en el eje 1, correspondiente a $\dot{\theta}$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{e}_1 + \Omega\sin(\theta)\hat{e}_2 + \Omega\cos(\theta)\hat{e}_3$$

por lo tanto,

$$\omega_1 = \dot{\theta} \quad \omega_2 = \Omega\sin(\theta) \quad \omega_3 = \Omega\cos(\theta)$$

con eso se tiene que las ecuaciones de Euler quedan como (considerando que $N_1 = 0$ como lo dice el enunciado)

$$\frac{1}{12}ML^2\ddot{\theta} + \Omega^2\sin\theta\cos\theta\frac{1}{12}ML^2 = 0$$

$$0 = N_2$$

$$-\frac{1}{12}ML^2\Omega\sin\theta\dot{\theta} + \Omega\sin\theta\dot{\theta}(-\frac{1}{12}ML^2) = N_3$$

y la ecuación de movimiento es

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

c) dado que $N_1 = N_2 = 0$, se tiene que

$$\vec{N} = -\frac{1}{6}ML^2\Omega\sin\theta\dot{\theta}\hat{e}_3$$

d) dado que $\theta = 0$ es el punto de equilibro estable, se tiene que $\sin\theta \approx \theta$ y $\cos\theta \approx 1$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0$$

por lo que

$$\Omega^2_{o.p.} = \Omega^2 \Rightarrow T_{o.p.} = \frac{2\pi}{\Omega}$$