Pauta Control Nº2 FI2001 Mecánica

Problema 1

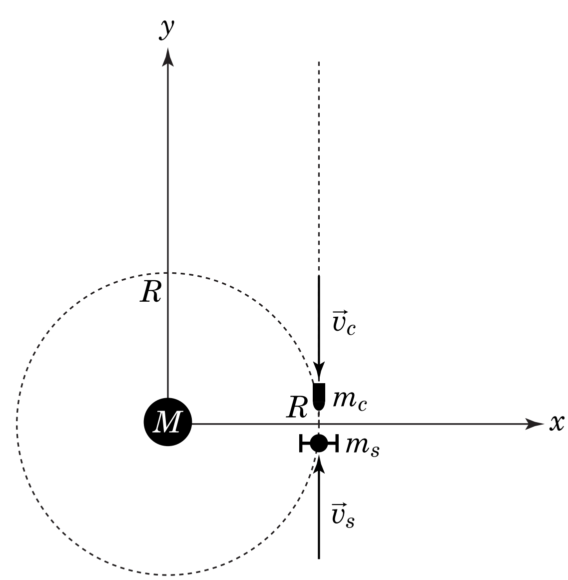
Comenzamos estableciendo nuestro sistema de referencia, con origen en el centro la Tierra. El eje y es solidario al movimiento inicial del cohete, mientras que el eje x une el origen con el punto de impacto del cohete con el satélite.

Parte a

Las fuerzas que actúan sobre el cohete son dos: la fuerza de gravedad de la tierra y la fuerza producida por el motor de la nave, con el fin que ésta se mueva con velocidad constante; es decir, aceleración nula. Por tanto, esta fuerza está dada por:

$$\vec{F}_{MOTOR} = -\vec{F}_{GRAVEDAD} = +\frac{GMm_c}{R^2}\hat{r} \tag{1}$$

Luego, el trabajo realizado por esta fuerza es inverso al realizado por la fuerza de gravedad, que a su vez es igual a la diferencia de energía potencial inicial y final:



$$W(\vec{F}_{MOTOR}) = -W(\vec{F}_{GRAVEDAD}) = -(U_{INICIAL} - U_{FINAL}) = U(R\hat{y}) = -\frac{GMm_s}{R} \qquad (2)$$

Como el punto de partida del cohete es muy lejano a la Tierra, lo consideramos infinito.

Parte b

Se nos dice que el satélite y el cohete chocan elásticamente. Para conocer sus velocidades justo después del choque, determinamos primero sus velocidades justo antes del choque. Como el satélite se mueve con *movimiento circunferencial uniforme* (*M.C.U.*), su aceleración –producto de la gravedad de la Tierra– es centrípeta:

$$F_G = m_s a_c \Longleftrightarrow \frac{GMm_s}{R^2} = \frac{m{v_s}^2}{R} \quad \Longleftrightarrow \quad v_s = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (3)$$

Y justo antes del choque, $\vec{v}_s = \sqrt{\frac{GM}{R}}\hat{y}$.

Se nos dice también que el momentum del cohete es igual y opuesto en signo, por tanto, la velocidad del cohete es:

$$\vec{v}_c = -\frac{m_s}{m_c}\sqrt{\frac{GM}{R}}\hat{y} \qquad (4)$$

La colisión entre ambos es elástica, conservándose el momentum y la energía cinética del sistema compuesto:

$$m_c\vec{v}_c + m_s\vec{v}_s = m_c\vec{v}_c' + m_s\vec{v}_s' = \vec{0}, \qquad \frac{1}{2}m_c{v_c}^2 + \frac{1}{2}m_s{v_s}^2 = frac12m_c{v_c'}^2 + \frac{1}{2}m_s{v_s'}^2 \qquad (5)$$

Se trata de un sistema no lineal, aunque resoluble. En realidad la solución es trivial: se verifica por simple inspección que la rapidez del cohete y del satélite –ambas dos– se conservan: esto sucede en todo choque elástico entre dos cuerpos desde la perspectiva del sistema inercial en que el momentum total es cero:

$$|\vec{v}_s'| = |\vec{v}_s| = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \qquad |\vec{v}_c'| = |\vec{v}_c| = \frac{m_s}{m_c}\sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{6}$$

Las ecuaciones no son suficientes para determinar las direcciones de las nuevas velocidades; aunque sí sabemos que deben ser antiparalelas. Además se nos dice que, después del choque, ambos cuerpos salen en direcciones perpendiculares a las que tenían antes de chocar. Necesariamente, uno de los cuerpos se precipita a la Tierra, mientras que el otro se aleja radialmente.

La rapidez mínima para escapar de la gravedad de la Tierra desde la misma distancia es $\sqrt{2\frac{GM}{R}}$. No importa en qué sentido salga eyectado el satélite: caerá en la Tierra de todos modos. En cuanto al cohete, es obvio que si sale disparado hacia la Tierra, se estrellará. En caso contrario, puede escapar de la gravedad de la Tierra si $v_c \geq v_{esc}$; es decir, si $\frac{m_s}{m_c} \geq \sqrt{2}$.

Puntaje:

Punto base: 1.0 pto

Parte (a): 3.0 ptos

Parte (b): 3.0 ptos

Total: 7.0 ptos

Problema 2

El problema se trata de una partícula sometida a la influencia de una fuerza central. Establecemos un sistema de referencia con origen en el centro de fuerzas. El plano xy contiene la dinámica de la partícula (Sabemos que la dinámica de la partícula es plana, debido a la conservación del momento angular).

Trabajamos con coordenadas polares planas:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}, \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} \tag{1}$$

En estas coordenadas, el potencial y la fuerza tienen la forma:

$$U = -\frac{mk}{r^\lambda}, \qquad \vec{F} = -\nabla U = -\frac{\lambda mk}{r^{\lambda+1}}\hat{r} \tag{2}$$

Donde $\lambda > 0$. Como la fuerza es central, el momento angular se conserva:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2\dot{\phi} = J_0\hat{z} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\phi} = \frac{J_0}{mr^2} \tag{3}$$

La energía mecánica también se conserva:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{mk}{r^\lambda} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{{J_0}^2}{2mr^2} - \frac{mk}{r^\lambda} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r, J_0) \tag{4}$$

U_{eff} es el *potencial efectivo*:

$$U_{eff} = \frac{{J_0}^2}{2mr^2} - \frac{mk}{r^\lambda}, \qquad \frac{dU_{eff}}{dr} = -\frac{{J_0}^2}{mr^3} + \frac{\lambda mk}{r^{\lambda+1}}, \qquad \frac{dU_{eff}^2}{dr^2} = \frac{{J_0}^2}{mr^4} - \frac{\lambda(\lambda+1)mk}{r^{\lambda+2}} \tag{5}$$

El radio de equilibrio r_{eq} está dado por:

$$\frac{dU_{eff}}{dr}(r_{eq}) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r_{eq} = \left(\frac{\lambda m^2 k}{{J_0}^2}\right)^{\frac{1}{\lambda-2}} \tag{6}$$

Dado un movimiento circunferencial en torno al centro de fuerzas, la velocidad angular está dada por:

$$\omega_{mcu} = \frac{J_0}{m{r_{eq}}^2} = (J_0 m)^{1+\frac{4}{\lambda-2}}(k\lambda)^{\frac{2}{\lambda-2}} \tag{7}$$

Esta dinámica es estable sólo si la segunda derivada del potencial efectivo es positiva:

$$\frac{dU_{eff}^2}{dr^2}(r_{eq}) = {J_0}^{2+\frac{8}{\lambda-2}} m^{-(1+\frac{8}{\lambda-2})}(k\lambda)^{-\frac{4}{\lambda-2}}(2-\lambda) \tag{8}$$

Es estable si $\lambda < 2$ e inestable si $\lambda > 2$. Si $\lambda = 2$, es necesario hacer un *análisis débilmente no lineal* (seguir expandiendo en Taylor) para determinar la estabilidad.

La frecuencia de pequeñas oscilaciones vale:

$$\omega_{po} = \sqrt{\frac{1}{m}\frac{dU_{eff}^2}{dr^2}(r_{eq})} = (J_0 m)^{1+\frac{4}{\lambda-2}}(k\lambda)^{-\frac{2}{\lambda-2}}(2-\lambda)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2-\lambda}\,\omega_{mcu} \tag{9}$$

Para que la trayectoria sea cerrada, la razón entre el tiempo empleado en concretar una oscilación y el tiempo empleado en dar una vuelta, debe ser racional (En particular, si son iguales, la trayectoria se cierra en una sola vuelta); es decir:

$$\frac{\omega_{po}}{\omega_{mcu}} \in \mathbb{Q} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{2-\lambda} \in \mathbb{Q} \tag{10}$$

Nótese que el único valor natural que puede satisfacer esto es $\lambda = 1$.

Puntaje:

Punto base: 1.0 pto

Potencial efectivo: 1.0 pto

Radio de equilibrio: 1.0 pto

Velocidad angular en movimiento circular: 1.0 pto

Condición de estabilidad: 1.0 pto

Frecuencia de pequeñas oscilaciones: 1.0 pto

Condición de órbita cerrada: 1.0 pto

Total: 7.0 ptos