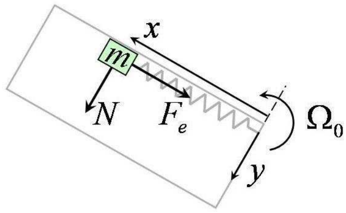
Solución Problema 1

En el sistema no inercial, las ecuaciones escalares del movimiento son:



$$m\ddot{x} = -k(x-\ell_0) + m\Omega_0^2 x \qquad (1)$$
$$0 = N - 2m\Omega_0\dot{x} - m\Omega_0^2\, 2\ell_0 \qquad (2)$$

a) Condiciones de equilibrio:

El valor de Ω_0, para obtener el equilibrio en $x = D$, se encuentra imponiendo en (1) que $\ddot{x}(x = D) = 0$

=> $0 = -k(2\ell_0 - \ell_0) + m\Omega_0^2 \cdot 2\ell_0$ => $2m\Omega_0^2 = k(2-1)$ => $\boxed{\Omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}}$

El periodo de pequeñas oscilaciones:

de (1): $m\ddot{x} + (k - m\Omega_0^2)x = k\ell_0$

donde Ω_0 fue calculado en (a) => $m\ddot{x} + (2m\Omega_0^2 - m\Omega_0^2)x = 2m\Omega_0^2\ell_0$ => $\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 2\Omega_0^2\ell_0$ (3)

=> $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2m}{k}}}$

b) Distancia a la que se separa de la pared

Si x_S es la distancia a la que se separa, entonces $N(x = x_S) = 0$

En (2) => $2m\Omega_0\dot{x}(x_S) + m\Omega_0^2\, 2\ell_0 = 0$

=> $\dot{x}(x_S) = -\Omega_0\ell_0$ (4) (aparece condición sobre la rapidez)

Para obtener la relación entre $\dot{x}$ y x usamos la ecuación (3)

$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 2\Omega_0^2\ell_0$ => $\dot{x}\dfrac{d\dot{x}}{dx} + \Omega_0^2 x = 2\Omega_0^2\ell_0$ => $\displaystyle\int_0^{\dot{x}} \dot{x}d\dot{x} = \Omega_0^2 \int_{4\ell_0}^{x} (2\ell_0 - x)dx$

=> $\dfrac{1}{2}\dot{x}^2 = \dfrac{\Omega_0^2}{2}((4\ell_0 x - 16\ell_0^2) - (x^2 - 16\ell_0^2))$ => $\dot{x}^2 = \Omega_0^2\, x(4\ell_0 - x)$ => $\dot{x}^2(x_S) = \Omega_0^2\, x_S(4\ell_0 - x_S)$

Expresión que debe satisfacer la condición (4) => $\Omega_0^2 x_S(4\ell_0 - x_S) = \Omega_0^2\ell_0^2$

de donde $x_S^2 - 4\ell_0 x_S + \ell_0^2 = 0$ => $x_S = \dfrac{4\ell_0 \pm \sqrt{16\ell_0^2 - 4\ell_0^2}}{2} = \ell_0(2 \pm \sqrt{3})$

La partícula parte con el resorte estirado (desde $x = 4\ell_0$), por lo tanto toma primero el valor con el signo +. Es decir, la posición en la que se separa de la pared es: $\boxed{x_S = \ell_0(2 + \sqrt{3})}$