Potencial Efectivo

Cuando tenemos en un sistema sólo fuerzas conservativas, podemos usar la Energía del sistema para encontrar ecuaciones de movimiento que nos ayuden a ver el comportamiento de la partícula.

Generalmente se tiene que la energía E puede depender de más de un parámetro (ó variable). En el caso de gravitación (a modo de ejemplo) tenemos que

$$E(r,\dot{r},\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GmM}{r}$$

como se ve, esto depende de la coordenada r y ϕ, por lo que el tratamiento no es trivial. Sin Embargo, dado que tenemos solo fuerzas centrales, sabemos que el momento angular $\vec{l}$ es constante. En otras palabras, el sistema antes poseia dos grados de libertad (r y ϕ), pero el hecho de que $\vec{l}$ sea constante impone una restricción en el sistema (que es justamente que $\vec{l}$ se mantenga constante), haciendo que este pierda un grado de, por lo que ahora dependerá la energía de solo un grado de libertad.

$$\cancel{\vec{l} = cte \Rightarrow l = mr^2\dot{\phi}}$$

$$\cancel{\boxed{\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}}}$$

$\vec{l} = cte \Rightarrow l = m r^2 \dot{\phi}$

$$\therefore \boxed{\dot{\phi}(r) = \frac{l}{m} \cdot \frac{1}{r^2}}$$

Luego, la energía del sistema queda como

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{l}{m} \cdot \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{GmM}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{GmM}{r}}$$

al término $\frac{l^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{GmM}{r}$ lo llamaremos potencial efectivo

$$\boxed{U_{eff}(r) = \frac{l^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{GmM}{r}}$$

Si nos fijamos en la forma de la energía mecánica total, es "equivalente" a la energía de una partícula que se mueve en una dim. (la de variable r) que está sometida a la gravitación y a una fuerza que tiene un potencial de la forma $\frac{l^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2}$ (que llamaremos potencial centrífugo).

Luego, la energía se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

Del potencial efectivo es de donde salen los puntos de equilibrio. Dado que E es constante

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{r}\ddot{r} + \frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\cdot\dot{r} = 0 \qquad \div \dot{r}$$

$$\boxed{m\ddot{r} + \frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0}$$ ecuación de movimiento

dado que queremos puntos de equilibrio (i.e. $\ddot{r} = 0$), la ecuación para encontrarla es

$$\boxed{\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} = 0}$$ de aquí salen los puntos de equilibrio

Es muy común preguntar por los puntos estables y el periodo de oscilaciones pequeñas en el caso de puntos estables. Recordando que la ecuación del osc. armónico es

$$\ddot{q} + \Omega_0^2 q = cte, \quad \Omega_0^2 > 0$$

lo que nos falta es linealizar $\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}$ en torno al punto de equilibrio. Para esto, usamos expansión en serie de Taylor

$$\frac{\partial U_{eff}(r)}{\partial r} \approx \cancel{\left.\frac{\partial U_{eff}}{\partial r}\right|_{r \text{ de equilibrio}}} + \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r \text{ de equilibrio}} (r - r_{eq})$$

$$\emptyset$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial U_{eff}}{\partial r} \approx \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_{eq}} (r - r_{eq})}$$

reemplazando esto en la ecuación de movimiento se tiene

$$\boxed{\ddot{r} + \frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_{eq}} \cdot r = cte} \rightarrow \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_{eq}} > 0 \text{ para que } r_{eq} \text{ se estable}$$

$\therefore$ la frecuencia angular de oscilaciones pequeñas es

$$\Omega_{o.p.} = \sqrt{\frac{1}{m} \left.\frac{\partial^2 U_{eff}}{\partial r^2}\right|_{r_{eq}}} \Rightarrow \text{se calcula T.o.p.}$$

Sí bien, tomé sólo el caso de gravitación, el procedimiento es el mismo para cualquier fuerza central (o donde los supuesto que aquí hemos usado sean válidos).

Espero sea util el material recien presentado.

¡Suerte en el C2!