Mecánica

Ejercicio N°4

Semestre primavera 2010
Profesor: Claudio Romero
Profesores Auxiliares: Ignacio Ortega, Francisco Sepúlveda

Una cápsula espacial describe una órbita circular de radio R_0 moviéndose a rapidez v_0 alrededor de un cuerpo no especificado. Súbitamente, su cohete impulsor se enciende momentáneamente de modo que su velocidad aumenta a un valor αv_0, con $\alpha > 1$.

a) Determine el máximo valor de α para que la cápsula no escape de la atracción gravitacional del cuerpo que la atrae.

b) Asumiendo que α es menor al valor encontrado en (a), Calcule la distancia máxima alcanzada por la cápsula.

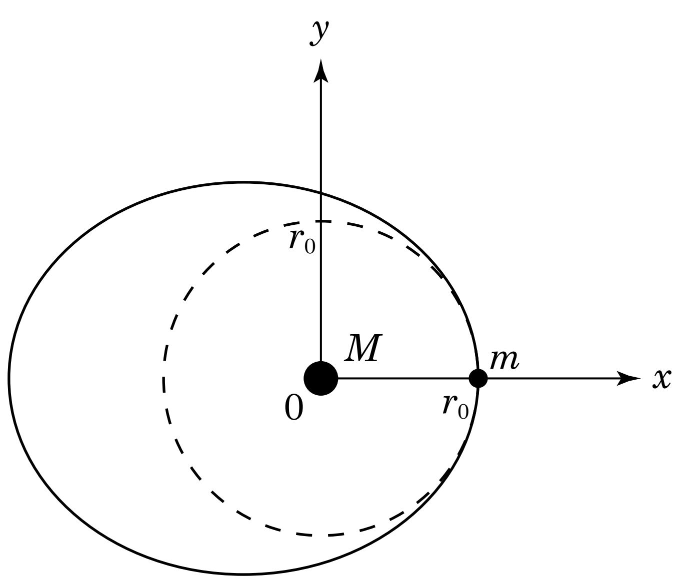
Pauta Ejercicio Nº4

En este problema, la masa del astro desconocido (centro de fuerzas) no es dato. Sin embargo, es posible calcularla ya que nos dan información sobre el movimiento circunferencial uniforme que tiene la cápsula en un principio:

$$F_{gravedad} = ma_{centrpeta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{GMm}{{r_0}^2} = \frac{m{v_0}^2}{r_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad M = \frac{r_0{v_0}^2}{G}$$

La masa de la cápsula tampoco es dato. No obstante, la trayectoria de una partícula bajo una fuerza de gravedad no depende de su masa; sólo de la masa del cuerpo celeste que la ejerce:

El sistema de referencia escogido para resolver el problema tiene su origen en el centro de fuerzas. El eje x une al astro y a la cápsula en el instante en que se detonan los motores de la cápsula ($t = 0$). El eje y es paralelo a la velocidad de la cápsula en ese momento. Luego, toda la dinámica queda contenida en el plano xy (ver figura).



Parte a

Las condiciones justo después de la detonación son:

$$\vec{r} = r_0\hat{x}, \qquad \vec{v} = \alpha v_0\hat{y}$$

Con $\alpha > 1$. El momento angular y la energía son conservados, pues la fuerza de gravedad es central y conservativa; basta evaluarlos en este instante:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr_0\alpha v_0\hat{z}$$

$$E = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} - \frac{GMm}{|\vec{r}|} = m{v_0}^2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big)$$

La trayectoria es cerrada sólo si la *excentricidad* es menor a 1; o equivalentemente, si la energía es negativa. En este problema, tal cosa se da sólo si $\alpha < \sqrt{2}$.

Parte b

Dado un valor de α entre 1 y 2, nos preguntamos cómo será la trayectoria de la cápsula. Sabemos que el *radio de equilibrio* está dado por:

$$r_{eq} = \frac{\ell^2}{GMm^2} = \alpha^2 r_0$$

La excentricidad, por su parte, se escribe:

$$e = \sqrt{\frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^3} + 1} = \sqrt{2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big)\alpha^2 + 1} = \sqrt{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1} = \alpha^2 - 1$$

La ecuación de la trayectoria queda:

$$r(\phi) = \frac{r_{eq}}{1 + e\cos(\phi)} = \frac{\alpha^2 r_0}{1 + (\alpha^2 - 1)\cos(\phi)}$$

La distancia mínima al centro de fuerzas es:

$$r_{min} = \frac{\alpha^2 r_0}{1 + (\alpha^2 - 1)} = r_0$$

Y la distancia máxima:

$$r_{min} = \frac{\alpha^2 r_0}{1 - (\alpha^2 - 1)} = \frac{\alpha^2 r_0}{2 - \alpha^2}$$