Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

1/Octubre/2010

P1. Usando D.C.L. considerando la órbita circunferencial se tiene que

$$\hat{\rho})\ -mr_c\omega_0^2 = -\frac{dU}{dr} = -a^2\frac{1}{r_c}$$

$$\Rightarrow mr_c^2\omega_0^2 = a^2$$

por lo que el radio r_c es

$$\boxed{r_c = \frac{a}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{m}}}$$

b) D.C.L. genérico

$$\hat{\rho})\ m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -a^2\frac{1}{r}$$

se conserva el momento angular

$$l_0 = mr_c^2\omega_0 = mr^2\dot{\phi}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \omega_0\frac{r_c^2}{r^2}$$

Reemplazando en la ecuación de $\hat{\rho}$

$$m\ddot{r} - m\omega_0^2 r_c^4\frac{1}{r^3} + a^2\frac{1}{r} = 0$$

Linealizar términos no lineales en torno a $r = r_c$

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{r_c^3} - \frac{3}{r_c^4}(r - r_c) = -\frac{3}{r_c^4}r + \frac{4}{r_c^3}$$

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_c^2}(r - r_c) = -\frac{1}{r_c^2}r + \frac{2}{r_c}$$

por lo que la ecuación de movimiento en torno a $r = r_c$ queda como

$$\ddot{r} + 3\omega_0^2 r - \frac{1}{m}(\frac{a}{r_c})^2 r = cte$$

pero de la parte a) se tiene que $\frac{1}{m}(\frac{a}{r_c})^2 = \omega_0^2$

$$\boxed{\ddot{r} + 2\omega_0^2 r = cte}$$

que es la ecuación de oscilador armonico. Luego, la frecuencia de oscilaciones pequeñas es

$$\boxed{\omega_{o.p.}^2 = 2\omega_0^2}$$

Ahora

$$\frac{\omega_0}{\omega_{o.p.}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$$

Luego, la órbita no es cerrada.