

$$\int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}} = L_0 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = L_0 \sinh^{-1}(u)|_0^1 = L_0 \sinh^{-1}(1)$$

por lo que se tiene

$$W_{roce} = -\mu k L_0 \int_0^{L_0} \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{L_0})^2}} = -\mu k L_0^2 \sinh^{-1}(1)$$

usando el teorema del trabajo y la energía

$$\begin{aligned} -\mu k L_0^2 \sinh^{-1}(1) &= \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{m}{2} v_0^2 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{1}{k L_0^2 \sinh^{-1}(1)} \left[\frac{m}{2} v_0^2 - \frac{k}{2} L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2 \right] = \frac{m v_0^2 - k L_0^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{2 k L_0^2 \sinh^{-1}(1)} \end{aligned}$$

P3. a) para la fuerza de reacción normal, hacemos un D.C.L., donde se obtienen las ecuaciones

$$\hat{j} : mg - F_{r,y} - \mu N = m\ddot{y}$$

$$\hat{i} : N - F_{r,x} = m\ddot{x}$$

usando la geometría del problema, se puede apreciar que

$$F_{r,y} = k\delta_y = k\sqrt{D^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{D^2 + y^2}} = ky$$

$$F_{r,x} = k\delta_x = k\sqrt{D^2 + y^2} \frac{D}{\sqrt{D^2 + y^2}} = kD$$

reemplazando estos términos, y reconociendo que $\ddot{x} = 0$, se tiene que:

$$\hat{i} : N = F_{r,x} = kD = cte$$

b) Se debe recordar la definición de trabajo y el teorema del trabajo y la energía:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{fuerzas \text{ no conservativas}} = \Delta E$$

Notemos que la fuerza no conservativa del problema es la fuerza de roce, y su trabajo es:

$$W_{roce} = \int (-\mu N dy) = - \int_{y_0=0}^{y=y_{max}} aykDdy = -\frac{akD}{2}y_{max}^2$$

$$E_i = \frac{1}{2}kD^2 \wedge E_f = \frac{1}{2}k(D^2 + y_{max}^2) - mgy_{max}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}ky_{max}^2 - mgy_{max} = -\frac{akD}{2}y_{max}^2$$

$$y_{max}(\frac{1}{2}k + \frac{akD}{2}) = mg \Rightarrow y_{max} = \frac{2mg}{k(1 + aD)}$$

c) De todas las fuerzas, la normal no realiza trabajo por ser perpendicular al movimiento. Luego, para el resto de las fuerzas se tiene:

$$W_{resorte} = \int (-ky)dy = - \int_{y_0=0}^{y=y_{max}} kydy = -\frac{k}{2}(\frac{2gm}{k(1 + aD)})^2$$

$$W_{resorte} = -\frac{2(mg)^2}{k(1 + aD)^2}$$

$$W_{roce} = \int (-\mu N dy) = - \int_{y_0=0}^{y=y_{max}} aykDdy = -\frac{akD}{2}(\frac{2gm}{k(1 + aD)})^2$$

$$W_{roce} = -\frac{2aD(mg)^2}{k(1 + aD)^2}$$

$$W_{peso} = \int mgdy = mg(\frac{2gm}{k(1 + aD)}) = \frac{2(mg)^2}{k(1 + aD)}$$