

MECÁNICA

Ejercicio N° 1

Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero

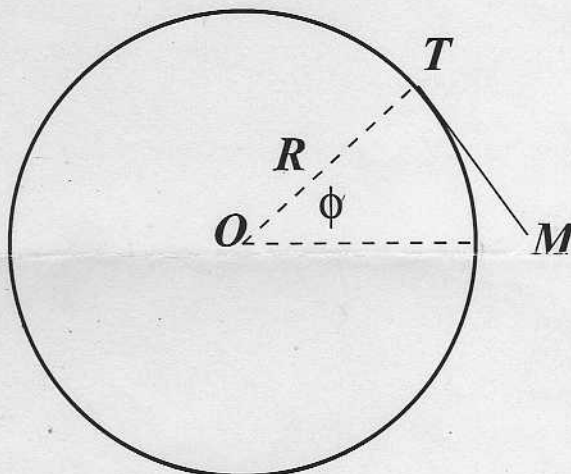
18 marzo 04

Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

A pesar de que las preguntas están concatenadas, se considerarán correctas solo las respuestas que estén totalmente correctas. No anule una respuesta por un signo errado.

Un hilo está enrollado en un cilindro de radio R . El hilo es mantenido siempre tenso de modo que la línea entre el extremo M y el punto de tangencia T en todo momento es una recta cuyo largo se designa $L(\phi)$ y ϕ es el ángulo entre la horizontal y el radio asociado al punto T . Se define que $L(\phi = 0) = 0$, es decir, antes de comenzar a desenrollar (o sea $L = 0$) el punto T , que coincide con M , está sobre la horizontal. * Puede resultar conveniente usar los vectores polares $\hat{r}$ y $\hat{\phi}$ asociados a la posición de T . Este problema va dirigido a comprender la trayectoria de M a medida que el hilo se desenrolla.



[a 0.5pt] Razone y justifique cuál es la función $L(\phi)$.

[b 1pt] Escriba el vector posición de M en tal forma que sea directo calcular su derivada con respecto al ángulo ϕ .

[c 1pt] Obtenga la velocidad $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ dejando $\dot{\phi}$ como factor que aun no se conoce.

[d 0.5pt] Obtenga el vector tangente $\hat{t}$ a la trayectoria de M .

[e 0.5pt] Escriba el elemento de arco ds de la trayectoria de M .

[f 1pt] Obtenga el radio de curvatura de la trayectoria de M para cada valor de ϕ .

[g 0.5pt] Obtenga el vector normal $\hat{n}$ a la trayectoria de M y que apunta hacia el centro de curvatura.

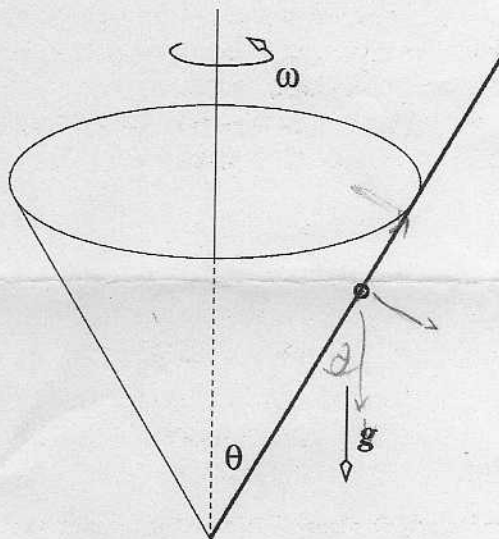
[h 1pt] Si $\phi(t) = \omega_0 t$ obtenga la aceleración normal y tangencial ($\vec{a}_n$ y $\vec{a}_t$) de M en todo punto de la trayectoria. Asegúrese que su respuesta sean vectores, que tengan los signos correctos y que use los vectores unitarios con los que originalmente expresó a $\vec{r}$.

Indique con un recuadro la respuesta final de cada letra.

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

A pesar de que las preguntas están concatenadas, se considerarán correctas solo las respuestas que estén totalmente correctas. No anule una respuesta por un signo errado.

Una vara barre el manto de un cono vertical de ángulo θ , a velocidad angular constante ω , como indica la figura. Una partícula P de masa m puede deslizarse sin roce a lo largo de esta vara y en el instante inicial se suelta a distancia r_0 del vértice del cono con $\dot{r}(0) = 0$.



[a: 1pt] Escriba vectorialmente las fuerzas del problema.

[b: 1pt] Escriba la ecuación de movimiento totalmente reducida al caso de este problema.

[c: 1pt] De la anterior obtenga una ecuación que no contenga coeficientes desconocidos (procedimiento usado en clases).

[d: 1pt] Acepte que $r(t)$ es de la forma

$$r = A \cosh \beta t + B \quad (a)$$

y obtenga los valores de A , β y B .

[e: 1pt] La partícula puede caer al vértice o, por el contrario, alejarse indefinidamente. Obtenga la condición para que no caiga al vértice.

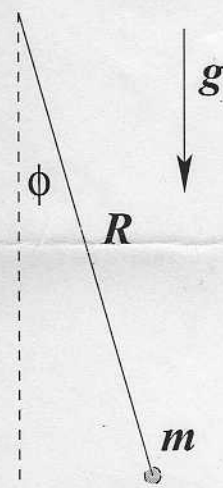
[f: $\frac{1}{2}$ pt] Sin suponer que la solución tiene la forma (a) integre una vez la ecuación obtenida en [c].

[g: $\frac{1}{2}$ pt] Obtenga las componentes de la fuerza normal.

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

A pesar de que las preguntas están concatenadas, se considerarán correctas solo las respuestas que estén totalmente correctas. No anule una respuesta por un signo errado.

Se tiene un péndulo plano formado por un hilo de largo R en cuyo extremo libre hay una partícula de masa m . Éste comienza a moverse en $t = 0$ desde la posición de reposo estable (posición vertical) con velocidad angular ω_0 . La evolución de este péndulo puede ser bastante diferente según el valor de ω_0 : (A) puede alcanzar un ángulo máximo para devolverse por donde vino; (B) puede llegar hasta la cúspide ($\phi = \pi$) aun con el hilo tenso, y seguir dando vueltas sin parar. (C) También hay un caso en que el hilo se destensa y la partícula deja de moverse en un arco de circunferencia y cae parabólicamente en un vuelo libre. Se trata de saber bajo qué condiciones ocurre qué caso. Datos son m , g , R y ω_0 .



[p1 1pt] Suponga que se da el comportamiento tipo (A). Obtenga una expresión para el ángulo máximo $\phi_{\max}$ y

[p2 1pt] vea qué condición debe cumplirse para que cuando se alcanza $\phi_{\max}$ la tensión sea positiva. Si no fuera positiva no se da movimiento tipo (A). Indique cual es el $\phi_{\max}$ extremo para movimiento tipo (A).

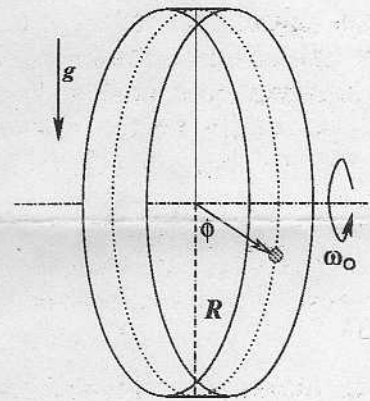
[p3 2pt] Obtenga una condición sobre ω_0 para que ocurra el movimiento circunferencial que más arriba se llamó tipo (B).

[p4 2pt] Si el movimiento es del tipo (C) obtenga el ángulo para el cual la partícula inicia un movimiento parabólico. Indique claramente las desigualdades que debe satisfacer ω_0^2 para que se dé este tipo de movimiento.

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

A pesar de que las preguntas están concatenadas, se considerarán correctas solo las respuestas que estén totalmente correctas. No anule una respuesta por un signo errado.

En el interior de una superficie cilíndrica de radio R con eje horizontal está apoyado un cuerpo P de masa m , cuyo coeficiente de roce estático con la superficie es μ . La superficie cilíndrica está rotando en torno a su eje con velocidad angular constante ω_0 . En el momento inicial el cuerpo P está en la parte más baja. Datos: m , g , ω_0 , R .



(a) Escriba la condición para que P no se despegue, suponiendo que no desliza. ¿Para qué combinación de los datos esta condición es siempre cierta? Sea (*) esta última condición.

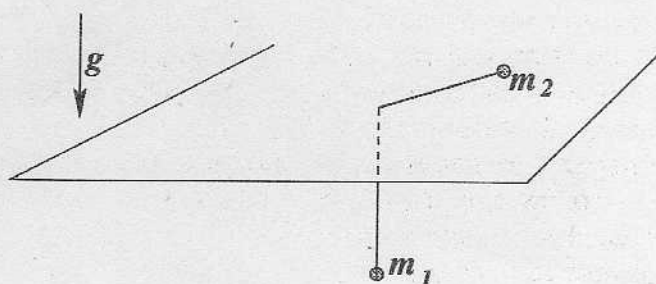
(b) Escriba la condición para que P no deslice, suponiendo que se cumple (*). Llame (**) a esta nueva condición. Argumente brevemente que (**) es más fuerte que (*).

(c) Suponga que (*) se cumple como igualdad y que $\mu = \sqrt{3}$. Esto implica que (**) no es siempre cierto. Obtenga el ángulo para el cuál (**) deja de ser cierto. ¿Cuánto vale la normal en ese momento? ¿Qué ocurre en el instante inmediatamente siguiente?

Solo considere el movimiento en el rango $0 \leq \phi \leq \pi$.

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

Sobre un plano desliza sin roce una partícula de masa m_2 , la que está unida a un hilo de largo fijo L , el que pasa por un agujero en el plano, para tener, en el otro extremo, una partícula de masa m_1 colgando en forma perfectamente vertical. El movimiento se inicia con la partícula 2 a distancia ρ_0 del agujero, con rapidez v_0 y tal que $\dot{\rho}(0) = 0$.



[a] Obtenga la velocidad angular de 2 para cualquier instante, en función de su distancia $\rho(t)$ al agujero.

[b] Obtenga el trabajo dW_{T_2} que la tensión ejerce sobre la partícula 2 en un instante cualquiera t y por un lapso infinitesimal dt , expresado con $\dot{\rho}$ y la magnitud de la tensión.

[c] Obtenga el trabajo dW_{T_1} que la tensión ejerce sobre la partícula 1 en un instante cualquiera t y por un lapso infinitesimal dt , expresado con $\dot{\rho}$ y la magnitud de la tensión.

[d] Obtenga el *trabajo total* de las fuerzas sobre el sistema desde $t = 0$ hasta un tiempo finito t_1 en el cual se sabe que $\rho(t_1) = \rho_1$.

* Los trabajos que se piden son aquellos que ocurren a lo largo de las trayectorias de las respectivas partículas.

* En este problema los signos son particularmente importantes, pero cada respuesta será evaluada en su propio mérito.