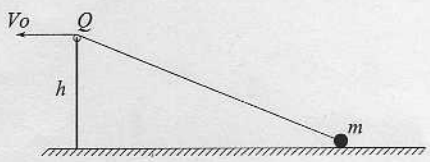
FI 21A MECANICA
Control 1
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Profs. Patricio Cordero
Rodrigo Soto
7 de abril de 2004
Duración: 2:30 hrs

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

[P1] Una partícula de masa m puede deslizar sin roce sobre una superficie horizontal. La masa está unida a una cuerda, la cual pasa por una polea en Q y su extremo es recogido con rapidez $V_0 = \text{cte}$. La polea tiene un radio despreciable y se encuentra a una altura h del suelo.



(a) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula en cada posición.

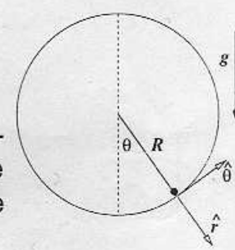
(b) Determine en qué posición la partícula se despega del suelo. ¿Cuánto vale la tensión en ese instante?

[P2] Una partícula de masa m se lanza en la superficie interna de un cascarón esférico de radio R, sometida a la acción de la gravedad. Estando a una posición que forma un ángulo θ_0 de la vertical, en el hemisferio inferior, la partícula se lanza con una rapidez inicial V_0 paralela a la horizontal.

(a) Obtenga $\dot{\phi}$ en función de θ mientras la partícula no se despegue.

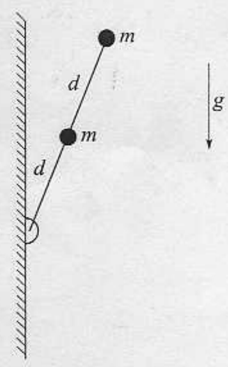
(b) Obtenga $\dot{\theta}$ en función de θ mientras la partícula no se despegue.

(c) Si $\theta_0 = \pi/4$, determine la rapidez V_0 de manera que la partícula alcance $\theta = 2\pi/3$ y luego vuelva a bajar. Muestre que en este punto de máxima altura, la partícula **no** se despega del cascarón. Recuerde que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(2\pi/3) = -1/2$ y $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.



[P3] Dos partículas de masa m están unidas a una barra inextensible sin masa de largo $2d$, tal como indica la figura. La barra puede rotar libremente respecto a una rótula fija a la pared.

Inicialmente, el sistema es soltado desde la posición vertical, con las masas arriba de la rótula.



(a) Encuentre la velocidad angular del sistema en función del ángulo que forma con la vertical.

(b) Calcule la fuerza que ejerce la rótula sobre la barra cuando ésta pasa por la posición horizontal.

La aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas es:

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

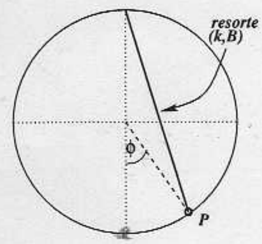
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

FI 21A MECANICA
Control 2
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Profs. Patricio Cordero
Rodrigo Soto
5 de mayo de 2004
Duración: 2:30 hrs

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

P1 Una partícula P de masa m esta constreñida a moverse en una circunferencia horizontal, de radio R. P está en el extremo de un resorte de largo natural B y constante elástica k. El otro extremo del resorte está fijo en un punto de la circunferencia.



(a) Discuta los posibles puntos de equilibrio que puede tener este sistema y cuáles (si es que alguno) son estables y cuáles son inestables. Examine todas las posibilidades, dependiendo de las magnitudes relativas del largo del resorte y del radio de la circunferencia.

(b) Obtenga la frecuencia angular de pequeñas oscilaciones asociada a cada punto de equilibrio estable en los casos (b1) $B=3R$ y (b2) $B=\sqrt{2}R$.

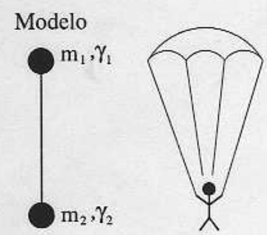
P2 Un vehículo de masa m se mueve rectilineamente en un plano horizontal impulsado por su motor. Además de las fuerza del motor, sobre el vehículo actúa una fuerza de roce proporcional a su velocidad $\vec{F}=-\gamma\vec{v}$, que se opone al movimiento. El vehículo acelera impulsado por su motor que provee una potencia contante P_0 y alcanza asintoticamente una situación estacionaria donde se mueve a velocidad constante V_0.

(a) Determiine V_0 en función de P_0 y de los demás parámetros del problema.

(b) En un cierto instante ($t=0$), y estando el vehículo moviéndose estacionariamente con velocidad V_0, se acelera su motor a una potencia $2P_0$, Encuentre cómo varía la velocidad, y la fuerza hacia adelante que provee el motor al vehículo en función del tiempo.

(c) ¿Cuál es la nueva velocidad estacionaria (máxima) que alcanza el vehículo, luego del proceso de aceleración de la parte (b)?

P3 Una persona que cae con un paracaídas puede ser modelado como dos partículas de masas m_1 (paracaídas) y m_2 (persona) que están unidas por una cuerda de largo L. El paracaídas y la persona sufren fuerzas de roce viscoso con el aire del tipo $\vec{F}=-\gamma\vec{v}$ ($\vec{v}$ es la velocidad de la partícula), con coeficientes γ_1 y γ_2, respectivamente. Las condiciones son tales que $m_2>m_1$ y $\gamma_1>\gamma_2$. Suponga, además, que la cuerda siempre está tensa y que el movimiento es vertical y por ende unidimensional.



(a) Determine la velocidad límite de la persona antes que se abra el paracaidas, si se lanza desde el reposo.

(b) Luego de haber alcanzado la velocidad estacionaria, el paracaidista abre el paracaidas. Determine cuánto vale su velocidad en función del tiempo.

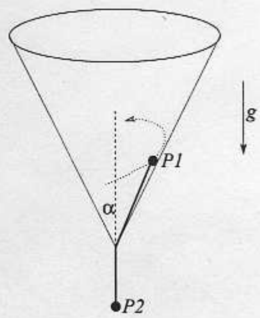
(c) Calcule la tensión de la cuerda en función del tiempo luego de haber abierto el paracaidas. Muestre ahora que la cuerda siempre está tensa.

FI 21A MECANICA
Control 3
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Profs. Patricio Cordero
Rodrigo Soto
9 de junio de 2004
Duración: 2:30 hrs

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

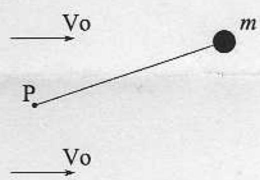
P1 Una partícula P_1 de masa m se mueve sobre la superficie interior de un cono de abertura α. Unido a la partícula por una cuerda de largo R se haya otra partícula P_2 de masa m, la cual cuelga por un orificio en el extremo del cono.



(a) Encuentre el radio de la órbita circunferencial que realiza la partícula P_1, si tiene una velocidad V_0.

(b) Si la partícula P_2 es perturbada de manera que su posición vertical es levemente modificada, encuentre el período de las pequeñas oscilaciones verticales que realiza.

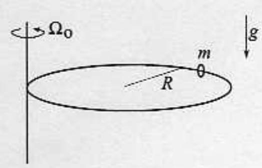
P2 Un objeto de masa M está atado a un punto fijo P mediante una cuerda inextensible de largo R. Adicionalmente, corre un viento con velocidad V_0 hacia la derecha, debido al cual, el objecto sufre una fuerza de roce viscoso la cual es proporcional a la velocidad relativa de la partícula con el viento. La constante de proporcionalidad es γ.
El movimiento ocurre en dos dimensiones y la gravedad es despreciable.



(a) Determine la ecuación de movimiento para el objeto.

(b) Considere que inicialmente el objeto está en reposo, formando un ángulo ϕ_0 con la dirección del viento. Suponga $\phi_0 \ll 1$. Encuentre la condición para que el movimiento sea subamortiguado (oscilante). Escriba la solución al movimiento.

P3 Un aro horizontal, de radio R, se hace girar con velocidad angular constante Ω_0 respecto a un eje vertical que pasa por el aro (a distancia R del centro). Una argolla de masa m puede deslizar sin roce en el aro.
Inicialmente la argolla está el punto opuesto al eje y se le da una velocidad V_0, relativa al aro, en la misma dirección de giro del aro.
Determine la velocidad mínima que hay que darle a la argolla para que llegue hasta el eje.



$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'$$

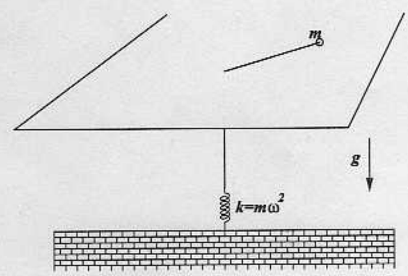
FI 21A MECANICA
Examen
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Profs. Patricio Cordero
Rodrigo Soto

2 de julio de 2004
Duración: 2:30 hrs

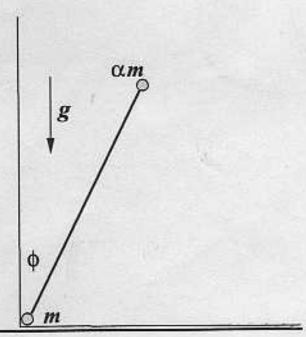
Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

P1 Por un plano horizontal desliza sin roce una partícula de masa m unida a un hilo. Éste pasa por un agujero y termina unido a un resorte de constante elástica k verticalemente debajo del agujero. Cuando el resorte está en su largo natural, la partícula está justo en el agujero. En lo que sigue se pide estudiar la dinámica cuando la partícula es soltada a una distancia ρ_0 del agujero y con una velocidad perpendicular al hilo de magnitud v_0.



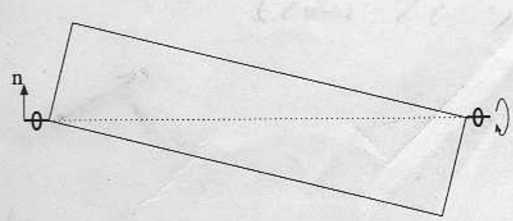
- Determine la ecuación de movimiento.
- Encuentre la relación entre ρ_0 y v_0 opara que la órbita sea circunferencial.
- Obtenga las pequeñas oscilaciones en torno a esta órbita circunferencial. (obtenga la frecuencia).
- Determine si la aproximación de pequeñas oscilaciones tienen asociadas órbitas cerradas.

P2 Dos partículas de masas m (abajo) y αm (arriba) están unidas por una barra de largo L. El sistema está inicialmente apoyado en una pared horizontal y otra vertical como lo muestra la figura. El sistema es soltado desde la posición vertical y se saca ligéramente desde su posición vertical y comienza a caer desde el reposo.



- Encuentre la ecuación para el ángulo.
- Encuentre la normal N_v que el suelo ejerce sobre la partícula de abajo y la fuerza normal N_h que la pared ejerce sobre esta misma partícula, ambas expresadas como funciones del ángulo.
- Analice si primero se levanta del suelo o se separa de la pared.

P3 Una placa rectangular de masa M, lados a y b y espesor despreciable se hace girar con velocidad angular constante Ω_0 por un eje que pasa por la diagonal del rectángulo. El movimiento ocurre en ausencia de gravedad.



- Calcule el momento angular del sólido $\vec{L}$ y muestre que si $a \neq b$ entonces, $\vec{L}$ no es constante.
- En cada extremo los soportes ejercen fuerzas tales que mantienen sujeta la placa, permitiendo que gire tal como se ha descrito. Suponga que las fuerzas del soporte izquierdo y derecho se escriben como $\vec{F}_I = F_I\hat{n}$ y $\vec{F}_D = F_D\hat{n}$, respectivamente. Determine los valores de F_I y F_D. Comente el resultado obtenido.

Nota: La matriz de inercia de la placa respecto a su centro, con los ejes x e y orientados según el lado largo(a) y corto (b), respectivamente, y el eje z perpendicular a la placa es $\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{Mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix}$