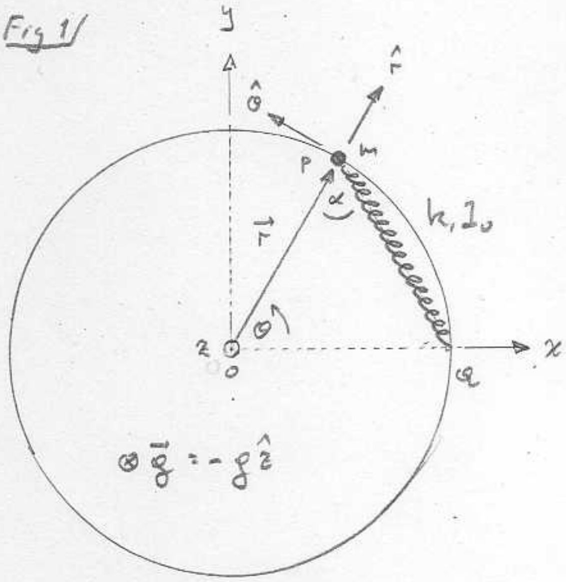
PAUTA CONTROL N°1

P2/

Escogemos el sistema de referencia ilustrado en la figura 1. El origen se ubica en el punto O, el eje z apunta hacia arriba y el eje x une los puntos O y Q. Asumimos que el movimiento de la masa m es plano: $z = 0$ siempre; lo cual se cumple si $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Fig 1/



Usamos coordenadas polares. Mientras la masa no se despegue de la pared del bote la siguiente descripción es válida:

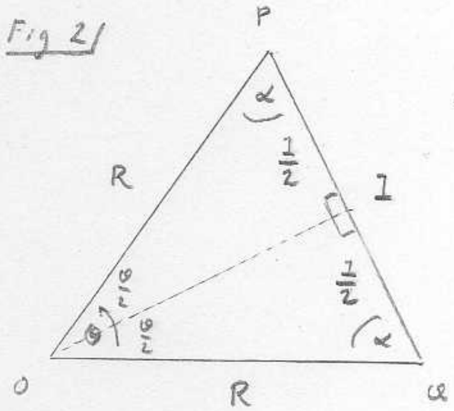
$$\vec{r} = R\hat{r} \qquad (= \vec{OP})$$
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\vec{a} = R(-\dot{\theta}^2\hat{r} + \ddot{\theta}\hat{\theta})$$

Condiciones iniciales:

$\theta(0) = 0$

$\dot{\theta}(0) \approx 0$

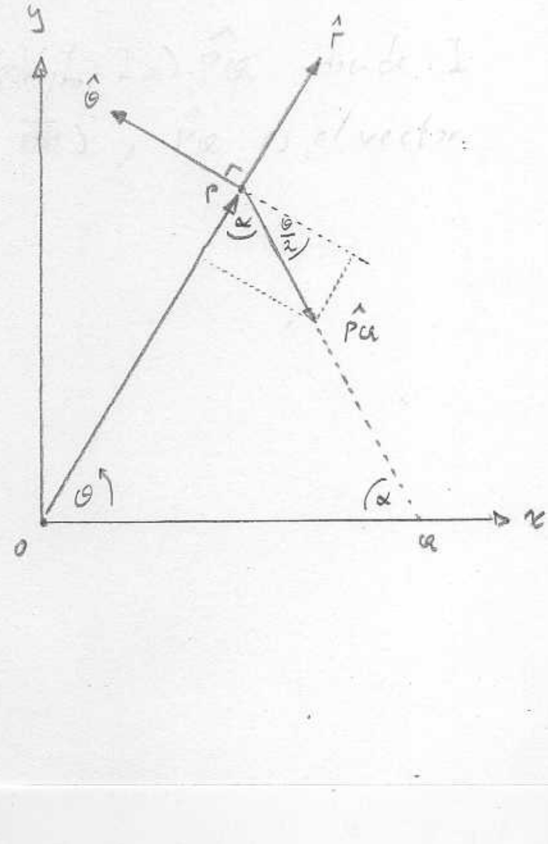
Fig 2/



a) La fuerza elástica está dada por $\vec{f} = k(l - l_0)\hat{PQ}$, donde l es el largo instantáneo del resorte $(\overline{OP})$ y $\hat{PQ}$ es el vector unitario que va desde P hasta Q.

El triángulo ΔOPQ es isósceles, ya que dos de sus lados miden R. Luego, el ángulo $\measuredangle OQP$ es también α.

Fig 3/



$$\theta + \alpha + \alpha = 180^\circ = \pi \iff \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}$$ (0.3 ptos)

De la figura 2 se deduce que $\frac{l}{2} = R\cos(\alpha) = R\sin(\frac{\theta}{2})$

Luego, $l = 2R\sin(\frac{\theta}{2})$

De la figura 3 se deduce que $\hat{P\alpha} = -(\sin(\frac{\theta}{2})\hat{r} + \cos(\frac{\theta}{2})\hat{\theta})$

Finalmente, $\vec{f} = h(l - l_0)\hat{P\alpha} = -h(2R\sin(\frac{\theta}{2}) - l_0)(\sin(\frac{\theta}{2})\hat{r} + \cos(\frac{\theta}{2})\hat{\theta})$

Y la magnitud: $|\vec{f}| = h|2R\sin(\frac{\theta}{2}) - l_0|$ (0.7 ptos)

b) La otra fuerza ejercida sobre m es la normal de la pared: $\vec{N} = -N\hat{r}$, donde N sólo puede ser positivo. Si N cambia de signo la masa se despega.

También están el peso y la normal del suelo, que se anulan entre sí, pues no hay dinámica en el eje z (0.2 ptos de bonus por ilustrar esto).

Ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

$(\hat{r})$: $-N - h(2R\sin(\frac{\theta}{2}) - l_0)\sin(\frac{\theta}{2}) = -mR\dot{\theta}^2$ (1.0 ptos)

$(\hat{\theta})$: $-h(2R\sin(\frac{\theta}{2}) - l_0)\cos(\frac{\theta}{2}) = mR\ddot{\theta}$ (1.0 ptos)

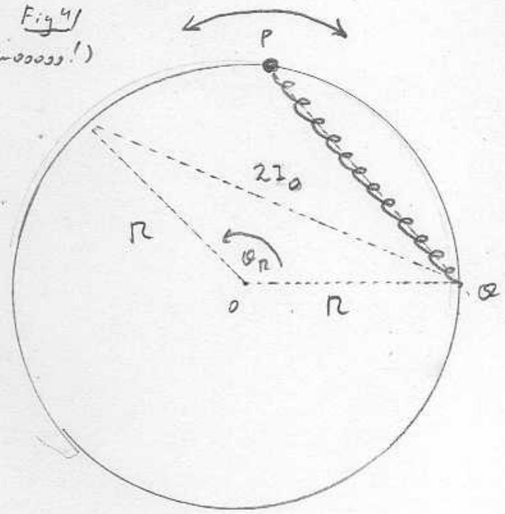
c) $(\hat{\theta}) \iff \ddot{\theta} = -\frac{h}{m}(2\sin(\frac{\theta}{2}) - \frac{l_0}{R})\cos(\frac{\theta}{2})$ $/ \times 2\dot{\theta}$

$$\iff 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -2\frac{h}{m}(2\sin(\tfrac{\theta}{2}) - \tfrac{l_0}{R})\cos(\tfrac{\theta}{2})\dot{\theta}$$

$$\iff \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -4\frac{h}{m}\frac{d}{dt}(\sin^2(\tfrac{\theta}{2}) - \tfrac{l_0}{R}\sin(\tfrac{\theta}{2}))$$

Integrando entre 0 y t (Recordar las condiciones iniciales):

Fig 4 (woooo!)



$$\dot{\theta}^2 = 4\frac{k}{m}\left(\frac{l_0}{R} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

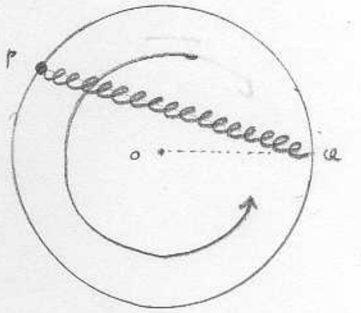
$$\dot{\theta} = \pm 2\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{l_0}{R} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Puntos de retorno: $\theta = 0$, $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{l_0}{R}$

$$\downarrow$$

$$\Rightarrow l = 2l_0$$

Fig 5



El movimiento es de oscilación entre el punto α y allí donde el resorte alcance la elongación $l = 2l_0$; claro está, si $l_0 < R$. Si $l_0 > R$, entonces la masa da vueltas en círculos por siempre (asumiendo que el punto α está ligeramente más arriba, entonces la masa no "traspasa" el resorte).

c) De (F) encontramos la normal:

$$N = mR\dot{\theta}^2 + k\left(l_0 - 2R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = k\left(5l_0 - 6R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{(1.0 ptos)}$$

$$N \geq 0 \iff \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \frac{5l_0}{6R} \iff l \leq \frac{5}{3}l_0 < 2l_0 \quad \text{(0.3 ptos)}$$

El valor de θ que anula la normal es menor que el ángulo de retorno: el movimiento de vaivén no es posible porque la partícula se despega antes. (Sería posible si, en lugar de ser una masa dentro de un cilindro, fuera un pequeño anillo moviéndose a lo largo de otro grande, porque acepta normales en ambos sentidos). Si $l_0 > \frac{6}{5}R$, entonces no hay θ tal que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5l_0}{6R}$; así que la masa nunca se despega. (0.7 ptos)