Problema 1

Un bloque de masa m está conectado a un riel que sólo le permite moverse en un eje horizontal, y a un resorte de rigidez k y largo natural despreciable. El otro extremo del resorte está conectado a un clavo que se mueve mediante un motor según $x_{CLAVO} = A\sin(\gamma t)$, en dirección paralela al riel. El sistema está inmerso en un fluido de viscosidad c.

a) Escriba la ecuación del movimiento del bloque en función de las cantidades:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \nu = \frac{c}{m}, \qquad a = \frac{kA}{m}$$

b) Demuestre que la solución general de la ecuación se puede escribir en la siguiente forma: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$, donde x_H es la solución general de la *ecuación homogénea* (clavo fijo) y x_P es una solución particular de esta ecuación.

c) Encuentre x_P. Utilice el *ansatz*: $x_P(t) = x_1 \sin(\gamma t) + x_2 \cos(\gamma t)$ y encuentre las constantes x_1, x_2. Analice el caso $\gamma = \omega$.

d) "La dinámica del sistema está regida por la solución particular". Explique.

Problema 2:

Un proyectil de masa m se dispara desde el suelo con velocidad v_0 en dirección vertical. El aire es un medio turbulento. Sea c su coeficiente de roce *cuadrático*.

Encuentre la trayectoria de la partícula, la altura máxima que alcanza, y el tiempo que demora en llegar a ella.

Problema 3:

Se tiene un oscilador armónico sub-amortiguado. Su frecuencia propia es ω y la viscosidad vale $\nu = \frac{1}{3}\omega$. El sistema es sometido a un forzamiento según: $F(t) = A\sin(\omega t) + B\sin(3\omega t)$.

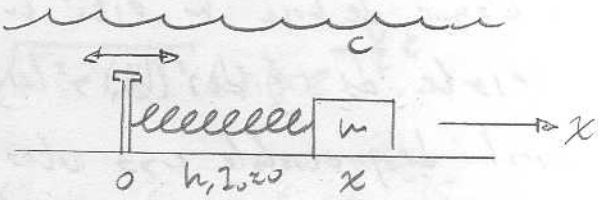
a) Encuentre la trayectoria para $t \gg 0$.

b) Encuentre la relación entre A y B para que las amplitudes de oscilación asociadas a las frecuencias ω y 3ω sean iguales.

Hint: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \exists\ \phi \in [0,2\pi]\ /\ \alpha \sin(\gamma t) + \beta \cos(\gamma t) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\gamma t + \phi)$

P1/ Movimiento armónico forzado y amortiguado

Bloque de masa m conectado a un resorte de rigidez k sin largo natural, cuyo otro extremo oscila según $\vec{r}_{curso} = A\sin(\gamma t)\hat{x}$



El sistema está inmerso en un fluido de viscosidad c.

Fuerzas horizontales:

$$\vec{F}_k = -k(\vec{r} - \vec{r}_{curso}) = -k(x - A\sin(\gamma t))\hat{x}$$

$$\vec{F}_c = -c\dot{\vec{r}} = -c\dot{x}\hat{x}$$

Newton: $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -k(x - A\sin(\gamma t)) - c\dot{x} = m\ddot{x}$

Sean $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\nu = \frac{c}{m}$, $a = \frac{kA}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \nu\dot{x} + \omega^2 x = a\sin(\gamma t)$

Solución general: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

x_h: Solución general de la ecuación homogénea. Depende de las condiciones iniciales y decae según $e^{-\frac{\nu}{2}t}$

x_p: Solución particular. Gobierna la dinámica del sistema para tiempos grandes.

Ansatz: $x_p(t) = x_1\sin(\gamma t) + x_2\cos(\gamma t)$

$$\dot{x}_p(t) = \gamma(x_1\cos(\gamma t) - x_2\sin(\gamma t))$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\gamma^2(x_1\sin(\gamma t) + x_2\cos(\gamma t))$$

Reemplazando:

$$(-\gamma^2 x_1 - \gamma\nu x_2 + \omega^2 x_1)\sin(\gamma t) + (-\gamma^2 x_2 + \gamma\nu x_1 + \omega^2 x_2)\cos(\gamma t) = a\sin(\gamma t)$$

Para satisfacer la ecuación, los factores del seno y el coseno se deben anular:

$$(\omega^2-\gamma^2)x_1 - \gamma\nu x_2 = a \,, \quad \gamma\nu x_1 + (\omega^2-\gamma^2)x_2 = 0$$

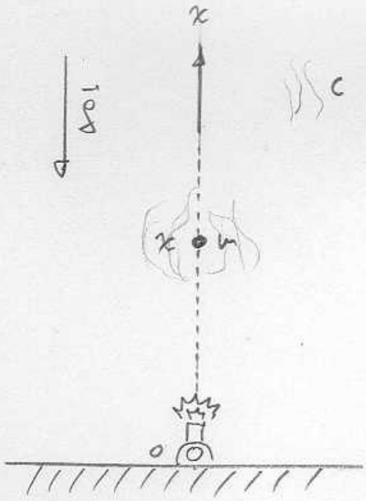
Sistema lineal de 2×2. La solución es:

$$x_1 = \frac{(\omega^2-\gamma^2)a}{(\omega^2-\gamma^2)^2+(\gamma\nu)^2} \qquad x_2 = -\frac{\gamma\nu a}{(\omega^2-\gamma^2)^2+(\gamma\nu)^2}$$

$$x_p(t) = a\,\frac{(\omega^2-\gamma^2)\sin(\gamma t) - \gamma\nu\cos(\gamma t)}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + (\gamma\nu)^2} \qquad a = \frac{kA}{m} = \omega^2 A$$

Si $\gamma = \omega$, $\quad x_p(t) = -\dfrac{a}{\omega\nu}\cos(\gamma t)$

P2) Elegimos un S.R. con el origen en el cañón y el eje x apuntando hacia arriba



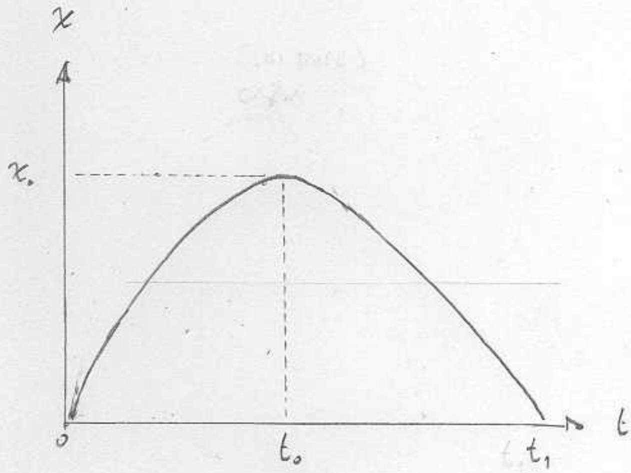
C.I's: $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0$

Fuerzas:

Gravedad: $m\vec{g} = mg\hat{x}$

Roce turbulento: $\vec{f} = -c|\vec{v}|^2\hat{v} = \begin{cases} -c\dot{x}^2\hat{x} & \dot{x} \geq 0 \\ c\dot{x}^2\hat{x} & \dot{x} \leq 0 \end{cases}$

Podemos hacer algunas adivinanzas sobre la dinámica de la partícula:



- Tal como la caída libre, la trayectoria es cóncava pero no simétrica: el tiempo que toma la masa en alcanzar la altura máxima es menor que el que demora en regresar al suelo ($t_1 > 2t_0$). La altura máxima x_0 es menor a la que sería si no hubiera roce
- En la caída, esperamos que la velocidad de la partícula tienda a ser constante (bajo la suposición de una "caída eterna", como si el suelo desapareciera)
- Claramente dos fases en la dinámica: ascenso, con $\dot{x} \geq 0$ siempre; y descenso; con $\dot{x} \leq 0$. Hay que hacer la distinción entre ambas para resolver la ecuación del movimiento

P Ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

• Fase de ascenso: $-mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x}$ $\quad \forall t \leq t_0$ ← (Por hallar)

Sea $v = \dot{x} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{c}{m}v^2 \Leftrightarrow \frac{dt}{dv} = -\frac{1}{\frac{c}{m}v^2 + g}$

Hemos aplicado inverso multiplicativo. Sabemos que si $v(t)$ es una función biyectiva (la asumimos decreciente en el intervalo $[0, t_0]$), la derivada de la función inversa $t(v)$ es el recíproco de la derivada de $v(t)$. El resto es integrar entre v_0 y v (Nótese los abusos de notación):

$$t - 0 = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\frac{c}{m}v^2 + g} = -\frac{1}{g}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\frac{c}{mg}v^2 + 1}$$

Cambio de variables:
$u = \sqrt{\frac{c}{mg}}\, v$
$dv = \sqrt{\frac{mg}{c}}\, du$

$$= -\sqrt{\frac{m}{cg}} \int_{\sqrt{\frac{c}{mg}}v_0}^{\sqrt{\frac{c}{mg}}v} \frac{du}{u^2 + 1} = -\sqrt{\frac{m}{cg}} \arctan(u) \Big|_{\sqrt{\frac{c}{mg}}v_0}^{\sqrt{\frac{c}{mg}}v}$$

$$= -\sqrt{\frac{m}{cg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\, v\right) + t_0 \qquad \text{donde } t_0 = \sqrt{\frac{m}{cg}} \tan\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\, v_0\right)$$

$$t(v) = -\sqrt{\frac{m}{cg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\, v\right) + t_0$$ Despejamos $v(t)$:

$$v(t) = -\sqrt{\frac{mg}{c}} \tan\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right)$$ (Positiva y decreciente para $t \leq t_0$)

Nótese que $v(t_0) = 0$. Asumimos que se trata de un punto de retorno: t_0 es el tiempo que tarda a la masa llegar a su altura máxima.

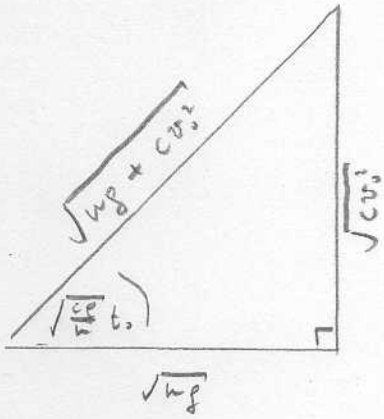
Trayectoria: $x(t) = \int_0^t v(t)\, dt = -\sqrt{\frac{mg}{c}} \int_0^t \tan\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right) dt$

$$= \frac{m}{c} \ln\left|\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right)\right| \Bigg|_0^t = \frac{m}{c} \ln\left|\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\, t_0\right)}\right| \qquad \forall t \leq t_0$$

Para encontrar $\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t_0\right)$, recordemos que $t_0=\sqrt{\frac{m}{cg}}\arctan\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v_0\right)$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{cg}{m}}\,t_0=\arctan\left(\sqrt{\frac{cv_0^2}{mg}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{cv_0^2}{mg}}=\tan\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t_0\right)=\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Si dibujamos un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{mg}$ y $\sqrt{cv_0^2}$, podemos descubrir que:



$$\sin\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t_0\right)=\frac{c.o.}{hip}=\sqrt{\frac{cv_0^2}{mg+cv_0^2}}$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t_0\right)=\frac{c.a.}{hip}=\sqrt{\frac{mg}{mg+cv_0^2}}$$

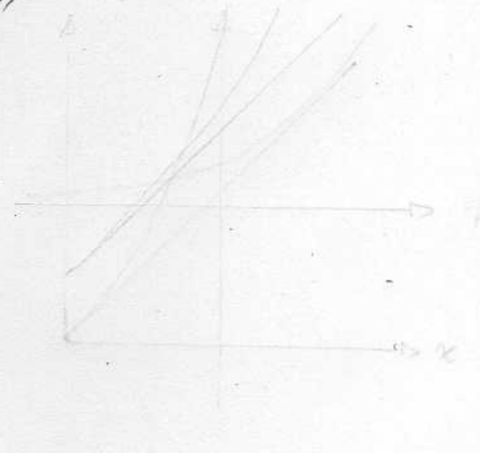
$$\Rightarrow x(t)=\frac{m}{c}\ln\left|\sqrt{\frac{mg+cv_0^2}{mg}}\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t-t_0)\right)\right| \quad \forall\, t\le t_0 \quad //$$

Altura máxima: $x_0=x(t_0)=\frac{m}{c}\ln\left(\sqrt{\frac{mg+cv_0^2}{mg}}\right)=\frac{m}{c}\ln\left(\sqrt{1+\frac{cv_0^2}{mg}}\right)$

P.D.Q. $x_0\le\frac{v_0^2}{2g}$ (Altura alcanzada sin roce)

$$\frac{m}{c}\ln\sqrt{1+\frac{cv_0^2}{mg}}\le\frac{v_0^2}{2g} \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{cv_0^2}{mg}}\le e^{\frac{cv_0^2}{2mg}} \Leftrightarrow 1+\frac{cv_0^2}{mg}\le e^{\frac{cv_0^2}{mg}} \quad \checkmark$$

Pues $1+x\le e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$ Q.E.D. //



• Fase de descenso: $-mg + c\dot{x}^2 = m\ddot{x}$ $\quad\forall t \geq t_0$

Sea $v = \dot{x}$ $\Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = -g + \dfrac{c}{m}v^2 \Rightarrow \dfrac{dt}{dv} = \dfrac{1}{\frac{c}{m}v^2 - g} = \dfrac{1}{g}\,\dfrac{1}{\frac{c}{mg}v^2 - 1}$

Suponemos que v es una función decreciente y, por tanto, biyectiva.

Integramos a dv entre 0 y v

$v(t_0) = 0 \Rightarrow t(0) = t_0$

$$\int_0^v \frac{dt}{dv}\,dv = t(v) - t(0) = t - t_0$$

$$\frac{1}{g}\int_0^v \frac{dv}{\frac{c}{mg}v^2 - 1} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{m}{cg}}\int_0^{\sqrt{\frac{mg}{c}}v} \frac{du}{u^2 - 1}$$

(*): c.v.: $u = \sqrt{\frac{c}{mg}}\,v$

$dv = \sqrt{\frac{mg}{c}}\,du$

$$= -\sqrt{\frac{m}{cg}}\,\operatorname{argtanh}(u)\Big|_0^{\sqrt{\frac{mg}{c}}v} = -\sqrt{\frac{m}{cg}}\,\operatorname{argtanh}\left(\sqrt{\frac{mg}{c}}\,v\right) = t - t_0$$

Despejamos: $v(t) = -\sqrt{\dfrac{mg}{c}}\tanh\left(\sqrt{\dfrac{cg}{m}}(t - t_0)\right)$ (Negativa y decreciente para $t \geq t_0$)

Nótese que $v(t_0) = 0$; es decir, v es continua en torno a t_0

Trayectoria: (Recordar que para $t \leq t_0$ y $t \geq t_0$ $v(t)$ tiene expresiones distintas)

$$x(t) = \int_0^t v(t)\,dt = x(t_0) + \int_{t_0}^t -\sqrt{\frac{mg}{c}}\tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right)dt$$

$$= \frac{m}{c}\ln\left(\sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}}\right) - \frac{m}{c}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right)\right|\Bigg|_{\cancel{t_0}\,0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c}\ln\left(\frac{\sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}}}{\cosh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t - t_0)\right)}\right) \quad \forall t \geq t_0 \quad //$$

· Tiempo de caída: encontremos $t_1 \geq t_0$ tal que $x(t_1) = 0$

Es decir, $\cosh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t_1 - t_0)\right) = \sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}}$

Sean $\alpha = \sqrt{\frac{cg}{m}}(t_1 - t_0)$, $\beta = \sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}} \implies \cosh(\alpha) = \beta$

Como cosh es simétrica, si α es solución, entonces $-\alpha$ también.

Luego $\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \beta \iff e^{\alpha} + e^{-\alpha} - 2\beta = 0 \iff e^{2\alpha} - 2\beta e^{\alpha} + 1 = 0$

$\iff (e^{\alpha} - \beta)^2 - \beta^2 + 1 = 0 \iff (e^{\alpha} - \beta)^2 = \beta^2 - 1$ Obs: $\beta > 1$

$\iff e^{\alpha} - \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 1}$

$\iff e^{\alpha} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \iff \alpha = \ln\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}\right)$

Tomamos "+" pues nos interesa el α positivo.

$\iff \sqrt{\frac{cg}{m}}(t_1 - t_0) = \ln\left(\sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}} + \sqrt{\frac{cv_0^2}{mg}}\right)$

$\iff t_1 = t_0 + \sqrt{\frac{m}{cg}} \ln\left(\sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}} + \sqrt{\frac{cv_0^2}{mg}}\right)$

$= \sqrt{\frac{m}{cg}}\left(\tan\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}v_0\right) + \ln\left(\sqrt{1 + \frac{cv_0^2}{mg}} + \sqrt{\frac{cv_0^2}{mg}}\right)\right)$ //

P3/ Ecuación del movimiento: $\omega^2 x + \nu\dot{x} + \ddot{x} = \frac{F(t)}{m}$

con $\nu = \frac{1}{3}\omega$ y $F(t) = A\sin(\omega t) + B\sin(3\omega t)$

Solución general: $x(t) = x_H(t) + x_A(t) + x_B(t)$

Donde x_H, x_A y x_B son soluciones de las ecuaciones:

$$\omega^2 x_H + \frac{\omega}{3}\dot{x}_H + \ddot{x}_H = 0$$

$$\omega^2 x_A + \frac{\omega}{3}\dot{x}_A + \ddot{x}_A = \frac{A}{m}\sin(\omega t)$$

$$\omega^2 x_B + \frac{\omega}{3}\dot{x}_B + \ddot{x}_B = \frac{B}{m}\sin(3\omega t)$$

La solución homogenea es conocida. Es una c.l. de dos funciones que tienen una parte oscilante y una parte exponencial de exponente $-\frac{\nu}{2}t$. Esto se debe a que $\nu < 2\omega$. En caso contrario, las funciones base son puramente exponenciales con exponentes negativos. En cualquier caso, para $t >> 0$, $x_H(t) \approx 0$ y la dinámica está gobernada por las soluciones particulares x_A y x_B.

Dada la ecuación $\omega^2 x + \nu\dot{x} + \ddot{x} = a\sin(\gamma t)$, una solución particular es:

$$x_p(t) = a\,\frac{(\omega^2-\gamma^2)\sin(\gamma t) - \gamma\nu\cos(\gamma t)}{(\omega^2-\gamma^2)^2 + (\gamma\nu)^2}$$

Aplicamos esta fórmula para encontrar x_A y x_B

$$x_A(t) = -\frac{3A}{m\omega^2}\cos(\omega t)$$

← Obs: en este caso $\gamma = \omega$ (freq. resonante)

$$x_B(t) = -\frac{B}{65\, m\omega^2}\left(8\sin(3\omega t) + \cos(3\omega t)\right)$$

Usando el hint, sabemos que $8\sin(3\omega t) + \cos(\omega t) = \sqrt{65}\cos(\omega t + \phi)$

Luego $x_B(t) = -\dfrac{B}{\sqrt{65}\, m\omega^2}\cos(\omega t + \phi)$

Para que las amplitudes sean iguales:

$$\frac{3A}{m\omega^2} = \frac{B}{\sqrt{65}\, m\omega^2} \Leftrightarrow \frac{B}{A} = 3\sqrt{65} \approx 25$$

//