Pauta P2 Control 1 Otoño 2010 FI2001 Mecánica

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

a) Haciendo el D.C.L. correspondiente para cada masa

$$\sum \vec{F}_{m_1} = \vec{T} + \vec{N}_1$$

$$\sum \vec{F}_{m_2} = \vec{T} + \vec{N}_2$$

Para la aceleración se tiene que $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \Omega_o = cte \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = 0$. La segunda ley de Newton queda para m_1

$$\hat{\rho})\ T = m_1(\ddot{\rho}_1 - \rho_1\Omega_o)$$

$$\hat{\theta})\ N_1 = 2m_1\dot{\rho}_1\Omega_o$$

para m_2

$$\hat{\rho})\ -T = m_2(\ddot{\rho}_2 - \rho_2\Omega_o)$$

$$\hat{\theta})\ N_2 = 2m_2\dot{\rho}_2\Omega_o$$

por lo que se tiene las ecuaciones de movimiento siguientes

$$\boxed{\ddot{\rho}_1 = \rho_1\Omega_o^2 + \frac{T}{m_1}}$$

$$\boxed{\ddot{\rho}_2 = \rho_2\Omega_o^2 - \frac{T}{m_2}}$$

b) Sumando las dos ecuaciones de $\hat{\rho}$ se tiene

$$m_1\ddot{\rho}_1 + m_2\ddot{\rho}_2 - \Omega_o^2(m_1\rho_1 + m_2\rho_2) = 0$$

se hace el cambio de variables $u = m_1\rho_1 + m_2\rho_2$, por lo que la EDO queda

$$\ddot{u} - \Omega_o^2 u = 0$$

se propone la solucion de la forma $u = e^{mt}$. El polinomio característico es

$$m^2 - \Omega_o^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\Omega_o$$

se tiene entonces que

$$u(t) = Ae^{\Omega_o t} + Be^{-\Omega_o t}$$

la condición inicial es $u(0) = m_1R + m_2(R + L)$, por lo que

$$A + B = (m_1 + m_2)R + m_2L$$

también tenemos que $\dot{u}(0) = m_1 0 + m_2 0 = 0$, por lo que

$$A - B = 0$$

de aquí se concluye que

$$A = B = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)R + m_2 L]$$

entonces

$$u(t) = \frac{1}{2}[(m_1 + m_2)R + m_2 L](e^{\Omega_o t} + e^{-\Omega_o t})$$

$$u(t) = [(m_1 + m_2)R + m_2 L]\cosh(\Omega_o t)$$

pero $u = m_1\rho_1 + m_2\rho_2 = (m_1 + m_2)\rho_1 + m_2 L$ pues $\rho_2 = \rho_1 + L$. entonces

$$(m_1 + m_2)\rho_1 + m_2 L = [(m_1 + m_2)R + m_2 L]\cosh(\Omega_o t)$$

finalmente

$$\boxed{\rho_1(t) = R\cosh(\Omega_o t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}L(\cosh(\Omega_o t) - 1)}$$

$$\boxed{\rho_2(t) = L + R\cosh(\Omega_o t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}L(\cosh(\Omega_o t) - 1)}$$

c) Sabemos que

$$\rho_1(t) = R\cosh(\Omega_o t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}L(\cosh(\Omega_o t) - 1)$$

entonces

$$\ddot{\rho}_1(t) = R\Omega_o^2\cosh(\Omega_o t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2}L\Omega_o^2\cosh(\Omega_o t) = \Omega_o^2[\rho_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}L]$$

de la ecuación de movimiento para m_1 tenemos

$$m_1(\ddot{\rho}_1 - \Omega_o^2\rho_1) = T$$

Finalmente

$$\boxed{T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}L\Omega_o^2}$$