

Ej. 2 / Romero, 2010/2

Definimos un sistema de referencia
(ver figura) y trabajamos en
coordenadas polares ($\rho = R, \phi$)

$$\vec{r} = R \hat{\rho}$$

$$\vec{v} = R \dot{\phi} \hat{\phi}$$

$$\vec{a} = R(-\dot{\phi}^2 \hat{\rho} + \ddot{\phi} \hat{\phi})$$

Condiciones iniciales: $\phi(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \omega_0$

Fuerzas:

• Peso: $m \vec{g} = m g \hat{v} = m g (\cos(\phi) \hat{\rho} - \sin(\phi) \hat{\phi})$

• Tensión: $\vec{T} = -T \hat{\rho}$ ($T \geq 0$. Si no, lo word se afloja)

(a) Ley de Newton: $\vec{F} = m \vec{a}$

$$(\hat{\rho}): -T + m g \cos(\phi) = -m R \dot{\phi}^2$$

$$(\hat{\phi}): -m g \sin(\phi) = m R \ddot{\phi} \Rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{g}{R} \sin(\phi) \Rightarrow 2\ddot{\phi} \dot{\phi} = -2\frac{g}{R} \dot{\phi} \sin(\phi)$$

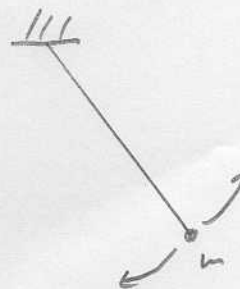
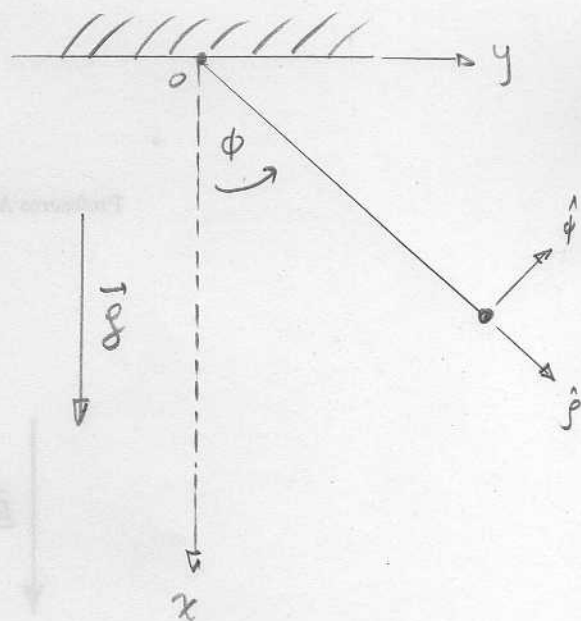
$$\Rightarrow \frac{d\dot{\phi}^2}{dt} = 2\frac{g}{R} \frac{d\cos(\phi)}{dt} \Rightarrow \dot{\phi}^2 - \omega_0^2 = 2\frac{g}{R} (\cos(\phi) - 1)$$

(Acá integramos y consideramos
las condiciones iniciales)

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2 + 2\frac{g}{R} (\cos(\phi) - 1)$$

$$\dot{\phi} = \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{g}{R} (\cos(\phi) - 1)} \quad (b)$$

No conocemos el signo: depende de si
el péndulo va en ida o vuelta.



$$(\dot{\phi}) \Rightarrow T = mg \cos(\phi) + mR\dot{\phi}^2 = mg(3\cos(\phi) - 2) + mR\omega_0^2 \quad (b)$$

Pueden suceder tres cosas con la dinámica del péndulo:

A: movimiento oscilatorio: ida y vuelta.

Esto pasa si $\dot{\phi}$ se anula para un valor de ϕ (Punto de retorno)

B: Rotación: sucede si $\dot{\phi}$ nunca se anula y T es siempre positivo

C: El péndulo se afloja y la masa cae libremente: esto pasa si T se anula, ya que no puede ser negativo.

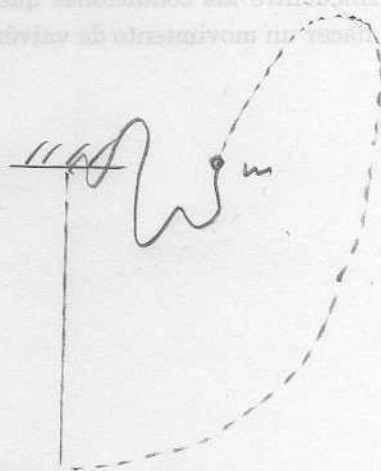
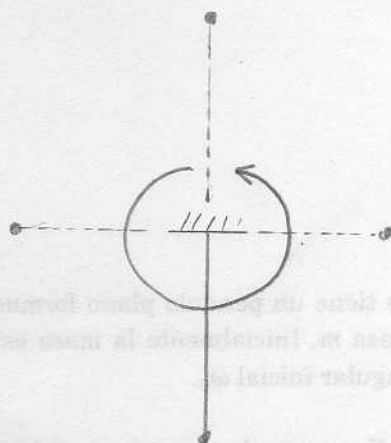
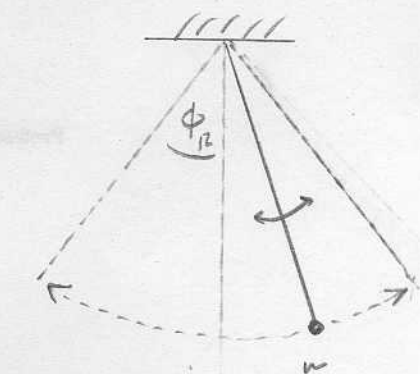
Anulamos $\dot{\phi}$ y T :

$$\dot{\phi}^2 = \omega_0^2 + 2\frac{g}{R}(\cos(\phi) - 1) = 0$$

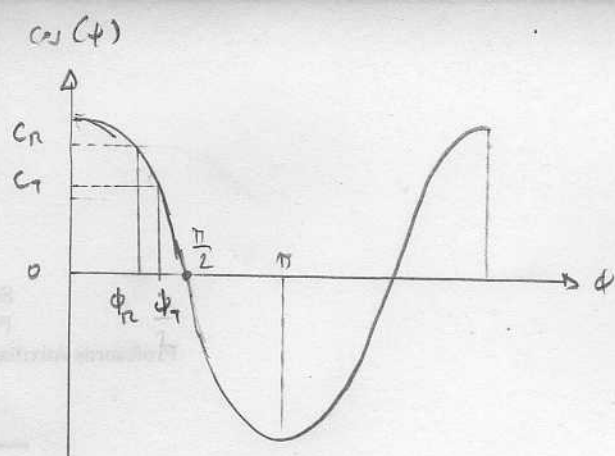
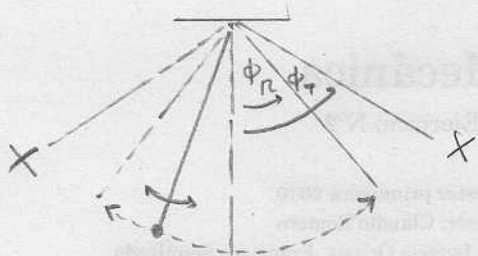
$$\Leftrightarrow \cos(\phi) = 1 - \frac{R\omega_0^2}{2g} \equiv c_R$$

$$T = mg(3\cos(\phi) - 2) + mR\omega_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\phi) = \frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g} \equiv c_T = \frac{2}{3}c_R$$



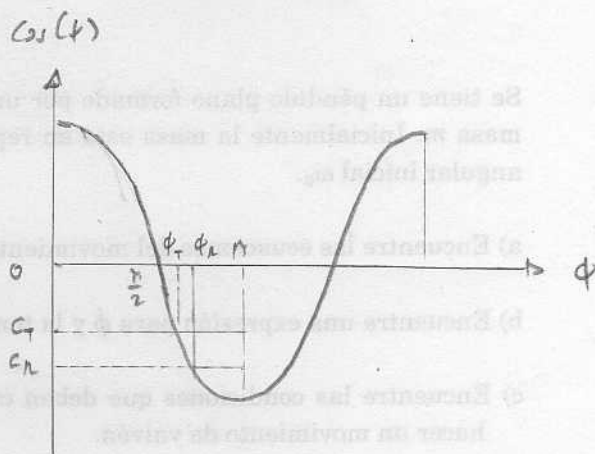
$$c_T = \frac{2}{3} c_R$$



Es claro que $c_R > c_T$ no pueden ser mayores que 1 y siempre son de mismo signo.

Si $0 < c_T < c_R$, entonces $\phi_R < \phi_T < \frac{\pi}{2}$, el péndulo nunca alcanza el valor $\phi \equiv \phi_T$, ya que al alcanzar el valor $\phi = \phi_R$ se devuelve; el movimiento es de vaivén y la cuerda nunca se afloja.

Si $-1 < c_T < 0$ entonces el péndulo, al alcanzar $\phi = \phi_T > \frac{\pi}{2}$ se afloja y la masa cae en movimiento libre. Si ϕ_R existe, es mayor que ϕ_T ; así que lo es alcanzado nunca por el péndulo.



Si $c_R < c_T < -1$ entonces ni ϕ_R ni ϕ_T existen. T y $\dot{\phi}$ nunca se anulan y el péndulo gira eternamente sin aflojar ni devolverse.

$$\bullet \quad |\omega| < \sqrt{\frac{2g}{R}} \Rightarrow 0 < c_T < c_R \Rightarrow \phi_R < \phi_T < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{Movimiento tipo A}$$

$$\bullet \quad \sqrt{\frac{2g}{R}} < |\omega| < \sqrt{\frac{5g}{R}} \Rightarrow -1 < c_T < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \phi_T < \pi \Rightarrow \text{Movimiento tipo B}$$

$$\bullet \quad |\omega| > \sqrt{\frac{5g}{R}} \Rightarrow c_R < c_T < -1 \Rightarrow \nexists \phi_R, \phi_T \Rightarrow \text{Movimiento tipo C. (c)}$$