Pauta Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

6/Septiembre/2010

P1.

a) Las fuerzas que actuan sobre la partícula son (usando coordenadas cilíndricas)

$$\sum \vec{F} = -c\vec{v} + \vec{N} + m\vec{g}$$

$\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, por lo tanto

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k}$$

luego,

$$\sum \vec{F} = -cR\dot{\theta}\hat{\theta} + c\dot{z}\hat{k} - N\hat{\rho} - mg\hat{k}$$

Ahora, la expresión de la aceleración

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

usando la segunda ley de Newton y separando en escalares se tiene

$$\hat{\rho})\ -N = -mR\dot{\theta}$$

$$\hat{\theta})\ -cR\dot{\theta} = mR\ddot{\theta}$$

$$\hat{k})\ -c\dot{z} - mg = m\ddot{z}$$

de $\hat{k}$ se tiene la edo

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} = -g$$

para la solución homogenea, se proponen soluciones de la forma $z = e^{\lambda t}$. Entonces el polinomio característico es

$$\lambda(\lambda + \frac{c}{m}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -\frac{c}{m}$$

$$z_h(t) = A + Be^{-(c/m)t}$$

para la solución particular proponemos $z_p(t) = Kt \Rightarrow K = -\frac{mg}{c}$

$$z_{gral}(t) = A + Be^{-(c/m)t} - \frac{mg}{c}t$$

Condición inicial $z(0) = h$ y $\dot{z}(0) = 0$

$$A + B = h,\ -B\frac{c}{m} - \frac{mg}{c} = 0$$

$$\boxed{z_{gral}(t) = h + \frac{m^2 g}{c^2}(1 - e^{-(c/m)t}) - \frac{mg}{c}t}$$

y la velocidad en el eje z es

$$\boxed{v_z(t) = -\frac{mg}{c}(1 - e^{-(c/m)t})}$$

b) usando la ecuación de $\hat{\theta}$, y separando variables

$$\ddot{\theta} = -\frac{c}{m}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{c}{m}dt$$

$$\int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln(\frac{\dot{\theta}}{v_0/R}) = -\frac{c}{m}t$$

despejando se tiene entonces

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{R}e^{-\frac{c}{m}t}}$$

c) usamos nuevamente la ecuación de $\hat{\theta}$, pero integramos con respecto al tiempo

$$\dot{\theta} - \frac{v_0}{R} = -\frac{c}{m}\theta \Rightarrow \dot{\theta}(\theta) = \frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta$$

la condición se cumple si $\dot{\theta}(2\pi) = 0$, por lo que despejando c obtenemos

$$\boxed{c = \frac{mv_0}{2\pi R}}$$

P2.

a) Las fuerzas presentes que actuan sobre la partícula, en coordenadas cilíndricas, son:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{roce} = -mg\hat{z} + N_\theta\hat{\theta} - N_\rho\hat{\rho} + f_{roce}\hat{z}$$

notemos que $\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ y $\dot{\theta} = \omega = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$, por lo que

$$\vec{a} = -R\omega^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{z}$$

haciendo uso de la segunda ley de Newton se tiene

$$\hat{\rho})\ \ -mR\omega^2 = -N_\rho$$

$$\hat{\theta})\ 0 = N_\theta$$

$$\hat{z})\ m\ddot{z} = -mg + f_{roce}$$

la condición crítica es que el peso le gane al roce estático máximo cuando el anillo está cayendo ($\ddot{z} < 0$)

$$mg > f_{roce} = \mu_e(mR\omega^2)$$

$$\boxed{\mu_e < \frac{g}{R\omega^2}}$$

b) cuando ya hay movimiento, se tiene que $f_{roce} = \mu_c N$. Reemplazando esto en la ecuación de movimiento para z

$$\ddot{z} = -g + \mu_c R\omega^2 = cte$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(\mu_c R\omega^2 - g)t^2 + C_1 t + C_2$$

las condiciones iniciales son $z(0) = h$ y $\dot{z}(0) = 0$, entonces $C_2 = h$ y $C_1 = 0$

$$z(t) = \frac{1}{2}(\mu_c R\omega^2 - g)t^2 + h$$

buscamos

$$z(T) = 0 = \frac{1}{2}(\mu_c R\omega^2 - g)T^2 + h$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{2h}{g - \mu_c R\omega^2}}}$$

P3.

a) Las fuerzas que actuan sobre la partícula son (usando coordenadas esféricas usuales)

$$\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = -N\hat{r} - mg\cos\theta\hat{r} + mg\sin\theta\hat{\theta}$$

la aceleración es

$$\vec{a} = (-R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{R}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}$$

usando $\vec{F} = m\vec{a}$ y quedandonos con la ecuación escalar de $\hat{\phi}$

$$m\frac{R}{\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2\theta) = 0 \Rightarrow \dot{\phi}\sin^2\theta = cte$$

de la condicion inicial se obtiene

$$v_0 = R\dot{\phi}_i\sin\theta_i \Rightarrow \dot{\phi}_i = \frac{V_0}{R\sin\theta_0}$$

pues $\theta_i = \pi - \theta_0$ y $\sin(\pi - \theta_0) = \sin\theta_0$. Luego se obtiene

$$\dot{\phi}\sin^2\theta = \frac{V_0}{R\sin\theta_0}\sin^2\theta_0$$

$$\boxed{\dot{\phi}(\theta) = \frac{V_0}{R}\frac{\sin\theta_0}{\sin^2\theta}}$$

b) usamos $\vec{F} = m\vec{a}$ y nos quedamos con la ecuación escalar de $\hat{\theta}$

$$m(R\ddot{\theta} - R\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta) = mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - (\frac{V_0\sin\theta_0}{R})^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} = \frac{g\sin\theta}{R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = (\frac{V_0\sin\theta_0}{R})^2\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g\sin\theta}{R}$$

dado que $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$, hacemos separación de variables e integramos

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = (\frac{V_0\sin\theta_0}{R})^2\int_{\pi-\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{R}\int_{\pi-\theta_0}^{\theta}\sin\theta d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = (\frac{V_0\sin\theta_0}{R})^2\{\frac{-1}{2\sin^2(\theta)} + \frac{1}{2\sin^2(\pi-\theta_0)}\} + \frac{g}{R}\{-\cos\theta + \cos(\pi-\theta_0)\}$$

pero $\sin(\pi-\theta_0) = \sin\theta_0$ y $\cos(\pi-\theta_0) = -\cos\theta_0$. Luego, se tiene que

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = (\frac{V_0\sin\theta_0}{R})^2\{\frac{1}{\sin^2\theta_0} - \frac{1}{\sin^2\theta}\} - \frac{2g}{R}\{\cos\theta + \cos\theta_0\}}$$

c) para que llegue hasta $\theta_{max} = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$, debe cumplirse que en ese punto $\dot{\theta} = 0$. Luego, tomando el resultado obtenido en b) y evaluando con $\theta_0 = \pi/4$ y $\theta = \theta_{max} = \pi/3$

$$\dot{\theta}^2 = 0 = (\frac{V_0\sqrt{2}}{2R})^2\{2 - \frac{4}{3}\} - \frac{2g}{R}\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

$$\Rightarrow \frac{V_0^2}{2R^2}\{\frac{2}{3}\} = \frac{g}{R}(1+\sqrt{2})$$

$$\boxed{V_0^2 = 3gR(\sqrt{2}+1)}$$

Veamos cuanto vale la normal en θ_{max}. De la segunda ecuación de Newton en $\hat{r}$

$$m(-R\dot{\theta}^2 - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta) = -N + -mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow N(\theta_{max} = \frac{\pi}{3}) = mR(\frac{V_0}{R}\frac{\sqrt{2}/2}{3/4})^2\frac{3}{4} - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\frac{V_0^2}{R}\frac{2}{3} - mg\frac{1}{2}$$

usando el valor obtenido para V_0

$$N(\theta_{max}) = mg\{2(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{2}\} > 0$$

por lo tanto la partícula no se despega en θ_{max}