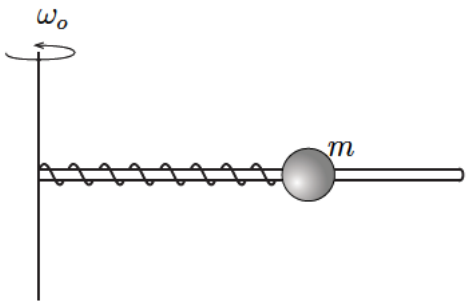
Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

3/Septiembre/2010

P1.



a) Fuerzas que actuan en la partícula

$$\vec{F} = -k(\rho - \ell_o)\hat{\rho} + N_2\hat{\theta} + N_1\hat{z}$$

aceleración de la partícula

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\omega_0^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\omega_o)\hat{\theta}$$

Segunda ley de Newton

$$\hat{\rho}) \ -k(\rho - \ell_o) = m\ddot{\rho} - m\rho\omega_0^2$$

$$\hat{\theta}) \ N_2 = 2\dot{\rho}\omega_0^2$$

de la primera ecuación se obtiene

$$\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega_0^2)\rho = \frac{k}{m}\ell_o$$

que es la ecuación del oscilador armónico simple si

$$\boxed{\frac{k}{m} > \omega_0^2}$$

b) definamos $\omega^2 \equiv \frac{k}{m} - \omega_0^2 > 0$. Luego, podemos decir que $\rho = e^{\lambda t}$ (para buscar la solución homogenea), por lo que el polinomio característico es

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\omega^2$$

por lo que la solucion a este polinomio de segundo grado es

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega i$$

por lo que la solución homogenea es

$$\rho_h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Para la solución particular, planeamos que $\rho = C = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, entonces

$$\rho_p(t) = \ell_o \frac{k/m}{\omega}$$

La solución general es

$$\rho(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} + \ell_o \frac{k/m}{\omega}$$

Usamos ahora C.I. $\rho(0) = l_0/2$ y $\dot{\rho}(0) = 0$. Entonces

$$A + B + \ell_o \frac{k/m}{\omega} = \frac{\ell_o}{2},\ A - B = 0$$

$$\Rightarrow A = B = \frac{1}{2}\ell_o(\frac{1}{2} - \frac{k/m}{\omega}) =$$

Luego

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\ell_o(\frac{1}{2} - \frac{k/m}{\omega})(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \ell_o \frac{k/m}{\omega} = \ell_o(\frac{1}{2} - \frac{k/m}{\omega})\cos(\omega t) + \ell_o \frac{k/m}{\omega}$$

y como el largo natural es ℓ_o se tiene que la compresión del resorte en funcion del tiempo es

$$\boxed{\delta(t) = \ell_o(\frac{1}{2} - \frac{k/m}{\omega})\cos(\omega t) + \ell_o(\frac{k/m}{\omega} - 1)}$$