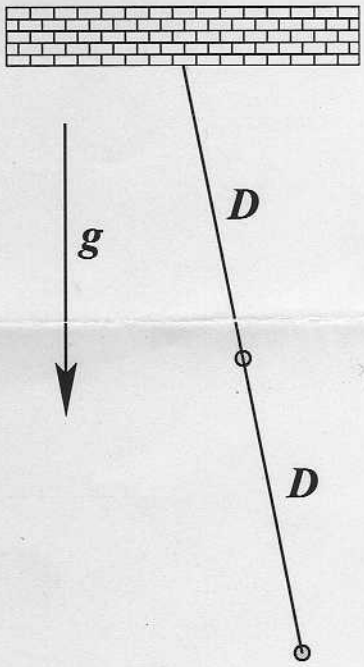
MECÁNICA
Ejercicio N^o 6
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero
29 abril 04
Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

Considere un péndulo constituido por dos partículas de masa m que están unidas a una barra de largo $2D$ y masa despreciable.



a) Escriba la energía en términos de una sola variable dinámica y sus derivadas.

b) Obtenga la ecuación de movimiento a partir de la energía anterior y demuestre que existe un punto de equilibrio estable, indicando cuál es.

c) Obtenga la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable.

d) Repita todo lo anterior pero para un péndulo formado por una vara de largo ND y N masas iguales separadas por una distancia D.

Puede interesarle saber que

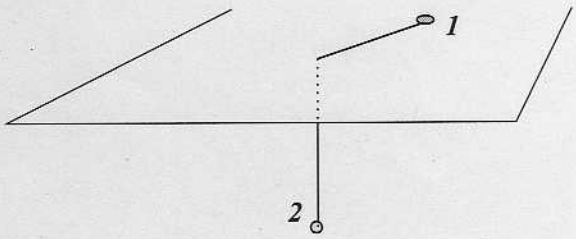
$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}, \qquad \sum_{j=1}^{N} j^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

MECÁNICA
Ejercicio N^o 7
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero
13 mayo 04
Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

Se tiene dos partículas unidas por un hilo de largo L. La partícula 1 está apoyada en un plano, sobre el que desliza sin roce, mientras la segunda partícula pende en forma vertical del hilo que pasa por un agujero en el plano, como muestra la figura. En la condición inicial ($t = 0$) la distancia entre 1 y el agujero es ρ_0, $\dot{\rho}(0) = 0$ y la rapidez inicial v_0 es la que se deduce en (a) abajo.



a) Obtenga v_0 en términos de ρ_0, las masas y g tal que la órbita de 1 sea circunferencial. Luego obtenga el valor del momento angular en este caso en términos de ρ_0, las masas y g.

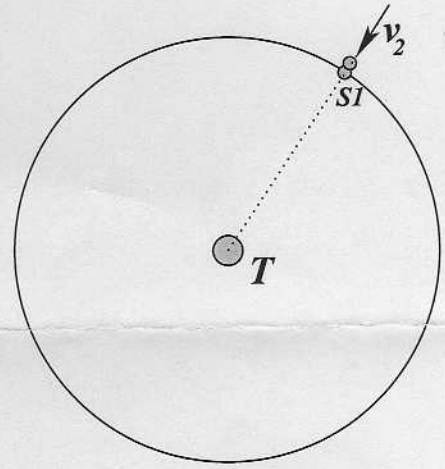
b) Si en un instante se modifica levemente la velocidad de modo que se mantenga el mismo valor del momento angular, se producen pequeñas oscilaciones del valor del radio ρ. Obtenga la frecuencia de esas pequeñas oscilaciones expresada con ρ_0, las masas y g. ¿Cuánto debe valer m_2/m_1 para que la frecuencia de pequeñas oscilaciones coincida con la velocidad angular de 1?

MECÁNICA
Ejercicio N^o 8
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero
27 mayo 04
Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, *sus* apuntes de clase. No hay consultas.

Un satélite S_1 de masa m_1 en órbita circunferencial (radio R_0) en torno a la Tierra (masa M), es golpeado radialmente por un meteorito de masa de masa $m_2 = \frac{m_1}{3}$ y velocidad, en el momento del impacto, $\vec{v}_2 = -v_2\hat{\rho}$ (ver figura). El meteorito queda incrustado en el satélite fomándose así un objeto S_3 de masa $m_1 + m_2$. Se observa que los radios mínimo y máximo de S_3 son



$$r_{\text{min}} = \frac{3R_0}{8}, \qquad r_{\text{max}} = \frac{9R_0}{8}$$

En (d) se pregunta el valor de v_2.

a) ¿Cual es la rapidez de S_1 antes del impacto?

b) ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de S_3?

c) ¿Cual es la rapidez del objeto compuesto S_3 justo después del impacto suponiendo que v_2 se conoce?

d) ¿Qué rapidez v_2 tenía el meteorito justo antes del impacto?

e) Si la energía incial es la de S_1 más la del meteorito y la final es la energía de S_3, obtenga $\Delta \equiv E_{\text{inicial}} - E_{\text{final}}$.

Puede ser útil recordar que

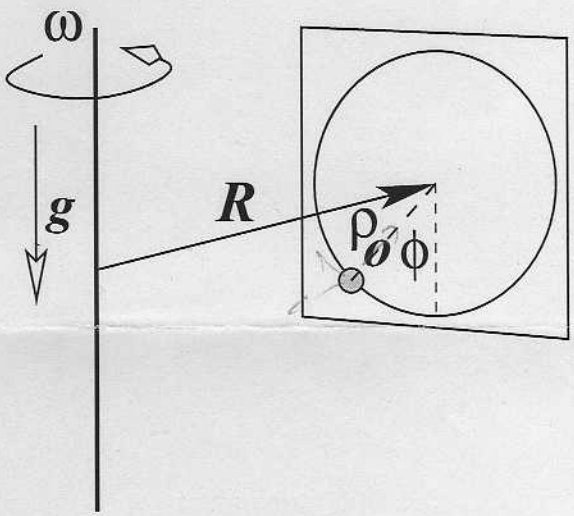
$$r(\phi) = \frac{R}{1 + e\cos\phi}, \qquad R = \frac{\ell^2}{GMm^2}, \qquad e = 1 + \frac{2E\ell^2}{(GM)^2m^3}$$

MECÁNICA
Ejercicio N^o 9
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero
3 junio 04
Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

Una circunferencia de radio ρ_0, en un plano vertical, gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω. El centro de la circunferencia describe, en su giro, una circunferencia de radio R. El plano de la circunferencia se mantiene siempre perpendicular al radio $\vec{R}$ de la figura. Una partícula de masa m puede deslizar sin roce por la circunferencia de radio ρ_0.



El problema es describir la ecuación de movimiento para esta partícula y sus propiedades. Para hacerlo puede escoger el sistema de referencia S' que desee.

a) Defina claramente el sistema S' escogido y calcule las fuerzas centrífuga, de Coriolis y trasversal que actúan sobre la partícula.

b) Obtenga la ecuación de movimiento completa y de ella obtenga una ecuación—sin coeficientes desconocidos—para el ángulo ϕ de la forma

$$\ddot{\phi} = f(\phi)$$

c) Discuta bajo qué condiciones la posición $\phi = 0$ es estable/inestable y, en los casos en que $\phi = 0$ sea estable, obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a ese ángulo.

d) En los casos en que $\phi = 0$ es inestable obtenga otro ángulo ϕ_1 que sí define una posición estable. Obtenga la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a ϕ_1.

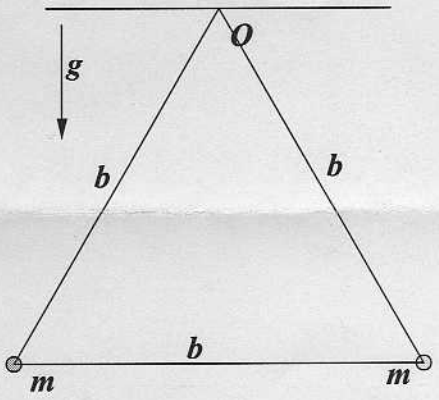
$$m\,\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\,\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\,'\right) - 2\,m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'$$

MECÁNICA
Ejercicio N^o 10
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Prof. Patricio Cordero
17 junio 04
Tiempo: 1 hora

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido. Se pueden usar, en forma personal, los apuntes de clase. No hay consultas.

La figura es un triángulo equilátero de lado b. El vértice superior, $\mathcal{O}$ está fijo y en los otros dos hay sendas masas m.



a) Determine la ecuación que describe el movimiento de oscilación en torno al eje que pasa por $\mathcal{O}$ y que está en el mimso plano que el triángulo. Es decir, las oscilaciones sacan al triángulo del plano de la figura.

b) Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones de este péndulo especial.

Se intentará hacer un ejercicio voluntario el jueves 24.