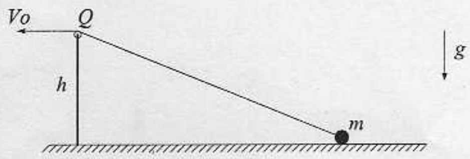
FI 21A MECANICA
Control 1
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Profs. Patricio Cordero
Rodrigo Soto
7 de abril de 2004
Duración: 2:30 hrs

Haga sus deducciones con prolijidad. Escriba en orden con letra legible. Una respuesta está correcta cuando tanto el método como el resultado están correctos. Cualquier método de solución correcto es válido.

[P1] Una partícula de masa m puede deslizar sin roce sobre una superficie horizontal. La masa está unida a una cuerda, la cual pasa por una polea en Q y su extremo es recogido con rapidez $V_0 = \mathrm{cte}$. La polea tiene un radio despreciable y se encuentra a una altura h del suelo.



(a) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula en cada posición.

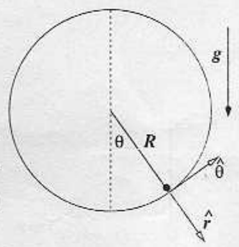
(b) Determine en qué posición la partícula se despega del suelo. ¿Cuánto vale la tensión en ese instante?

[P2] Una partícula de masa m se lanza en la superficie interna de un cascarón esférico de radio R, sometida a la acción de la gravedad. Estando a una posición que forma un ángulo θ_0 de la vertical, en el hemisferio inferior, la partícula se lanza con una rapidez inicial V_0 paralela a la horizontal.

(a) Obtenga $\dot{\phi}$ en función de θ mientras la partícula no se despegue.

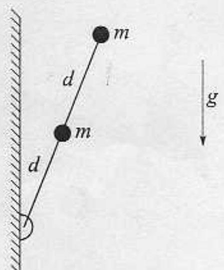
(b) Obtenga $\dot{\theta}$ en función de θ mientras la partícula no se despegue.

(c) Si $\theta_0 = \pi/4$, determine la rapidez V_0 de manera que la partícula alcance $\theta = 2\pi/3$ y luego vuelva a bajar. Muestre que en este punto de máxima altura, la partícula **no** se despega del cascarón. Recuerde que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(2\pi/3) = -1/2$ y $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.



[P3] Dos partículas de masa m están unidas a una barra inextensible sin masa de largo $2d$, tal como indica la figura. La barra puede rotar libremente respecto a una rótula fija a la pared.

Inicialmente, el sistema es soltado desde la posición vertical, con las masas arriba de la rótula.



(a) Encuentre la velocidad angular del sistema en función del ángulo que forma con la vertical.

(b) Calcule la fuerza que ejerce la rótula sobre la barra cuando ésta pasa por la posición horizontal.

La aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas es:

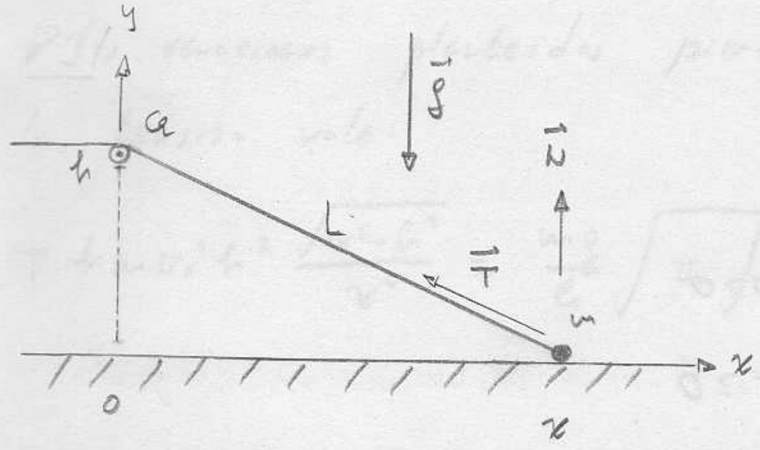
$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}\right)\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

CONTROL N°1 FI21A MECÁNICA

SECCIÓN: 1 SEMESTRE: Otoño 2004

PROFESOR: Patricio Cordero



P1/ Planteamos el sistema de referencia. El origen está en el suelo justo bajo la polea. El eje x es horizontal y la masa se desplaza a lo largo de él. El eje y es vertical.

Si en determinado instante la masa m está en la posición x, entonces el largo de la sección libre (no recogida) de la cuerda es: $L = \sqrt{x^2+h^2}$. Se nos dice que la cuerda es recogida con rapidez v_0. Eso quiere decir que $\frac{dL}{dt} = -v_0$; Es decir:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{x\dot{x}}{\sqrt{x^2+h^2}} = -v_0$$

Para poder resolver esta ecuación diferencial, necesitamos una condición inicial. No obstante, lo que se nos pide es despejar $\dot{x}$ en función de x, lo cual es trivial:

a) $$\dot{x} = -\frac{v_0}{x}\sqrt{x^2+h^2} \quad //$$ Derivamos para obtener $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x} = \frac{d}{dx}\left(-v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right)\cdot\left(-v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}\right)$$

$$= v_0\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x^2}\right)\cdot v_0\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x} = -\frac{(v_0 h)^2}{x^3} \quad //$$

b) La partícula se despega del suelo cuando la normal apunta hacia abajo (Lo cual, en realidad, no es físicamente posible).

Fuerzas sobre m:

Gravedad: $m\vec{g} = -mg\hat{y}$

Normal: $\vec{N} = N\hat{y}$ $\quad N \geq 0$

Tensión: $\vec{T} = T\hat{r}$ $\quad T \geq 0$

$\hat{r}$ es el vector unitario paralelo a la cuerda. Su sentido es desde la masa hacia la polea.

Posición de la polea relativa a la masa:

$$\vec{r}'_a = \vec{r}_a - \vec{r}_m = h\hat{y} - x\hat{x}$$

Luego, $$\hat{r} = \frac{\vec{r}'_a}{|\vec{r}'_a|} = \frac{h\hat{y} - x\hat{x}}{\sqrt{x^2+h^2}} \qquad |\hat{r}| = 1 \checkmark$$

Finalmente, $$\vec{T} = T\,\frac{h\hat{y} - x\hat{x}}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

Ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} = m\ddot{x}\hat{x}$

$$(\hat{x}):\quad -\frac{Tx}{\sqrt{x^2+h^2}} = -m\frac{v_0^2h^2}{x^3} \Leftrightarrow T = m v_0^2 h^2 \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x^4} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

La cuerda nunca se afloja; lo cual tiene lógica.

$$(\hat{y}):\quad N - mg + \frac{Th}{\sqrt{x^2+h^2}} = 0$$

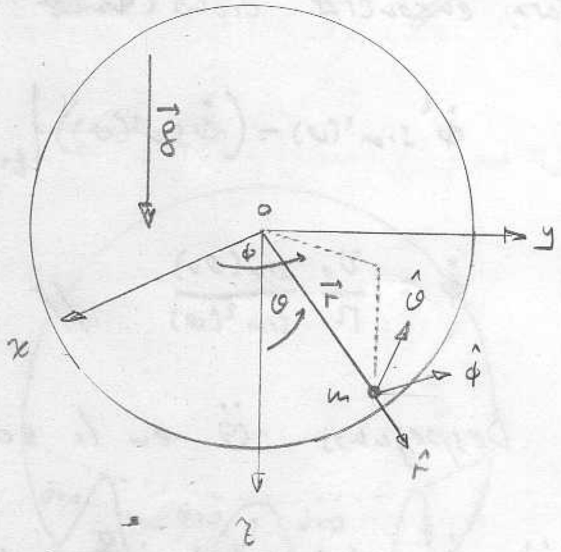
$$N = mg - \frac{Th}{\sqrt{x^2+h^2}} = m\left(g - \frac{v_0^2h^3}{x^4}\right)$$

$$N \geq 0 \Longleftrightarrow g \geq \frac{v_0^2 l_1^3}{x^4} \Longleftrightarrow x^4 \geq \frac{v_0^2 l_1^3}{g} \Longleftrightarrow x \geq \sqrt[4]{\frac{v_0^2 l_1^3}{g}}$$

Esta es la posición en la cual N pasa a ser negativo y las ecuaciones planteadas pierden sentido. En esta posición, la tensión vale:

$$T = m v_0^2 l_1^2 \frac{\sqrt{x^2+l_1^2}}{x^4} = \frac{mg}{l_1}\sqrt{v_0\sqrt{\frac{l_1^3}{g}} + l_1^2} \quad //$$

P2) Usamos el sistema de referencia ilustrado en la figura, con el eje z apuntando hacia abajo. El eje x se dispone de manera tal que inicialmente la partícula está justo bajo él. El origen O yace en el centro del cascarón.



$\vec{r} = R\hat{r}$

$\vec{v} = R(\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{\phi}\sin(\theta)\hat{\phi})$

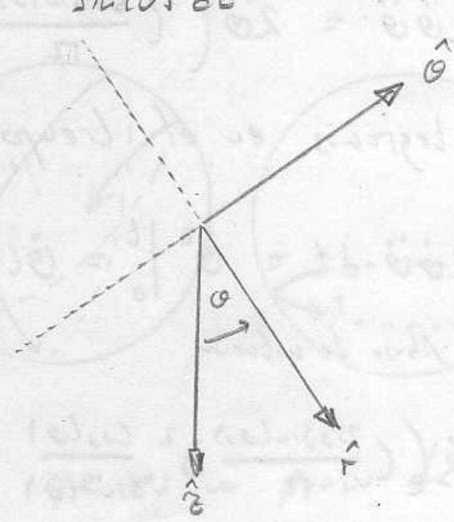
$\vec{a} = -R(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin(\theta))\hat{r} + R(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))\hat{\theta} + \frac{R}{\sin(\theta)}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin^2(\theta))\hat{\phi}$

Condiciones iniciales:

$\theta(0) = \theta_0, \quad \phi(0) = 0$ ← Por la elección del eje x

$\dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \frac{v_0}{R\sin(\theta_0)}$

Pues $\vec{v}(0) = v_0\hat{\phi}$



Fuerzas:

Peso: $m\vec{g} = mg\hat{z} = mg(\cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta})$ $\quad \hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$

Normal: $\vec{N} = -N\hat{r}$ $\quad$ Si $N<0$, la partícula se despega del cascarón

Ley de Newton: $\quad \vec{F} = m\vec{a}$

$(\hat{r})$: $\quad mg\cos(\theta) - N = -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin(\theta))$

$(\hat{\theta})$: $\quad -mg\sin(\theta) = mR(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta))$

$(\hat{\phi})$: $\quad 0 = \frac{mR}{\sin(\theta)}\frac{d\dot{\phi}\sin^2(\theta)}{dt}$

$(\hat{\phi})$: $\dfrac{d\, \dot{\phi} \sin^2(\theta)}{dt} = 0 \Rightarrow \underbrace{\dot{\phi}\sin^2(\theta) = cte}_{\exists (\text{existe})}$

a) Para encontrar dicho valor constante, evaluamos en $t=0$:

$$\dot{\phi}^2 \sin^2(\theta) = \left(\dot{\phi}\sin^2(\theta)\right)\Big|_{t=0} = \frac{v_0}{R}\sin(\theta_0)$$

$$\dot{\phi} = \frac{v_0}{R}\frac{\sin(\theta_0)}{\sin^2(\theta)} \quad //$$

b) Despejamos $\ddot{\theta}$ en la ecuación $(\hat{\theta})$:

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - \frac{g}{R}\sin(\theta) = \left(\frac{v_0 \sin(\theta_0)}{R}\right)^2 \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g}{R}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 2\dot{\theta}\left(\left(\frac{v_0\sin(\theta_0)}{R}\right)^2 \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g}{R}\sin(\theta)\right)$$

Integramos en el tiempo ambos lados de la igualdad.

$$\int_0^t 2\dot{\theta}\ddot{\theta}\, dt = \dot{\theta}^2\Big|_0^t = \dot{\theta}(t)^2 = \dot{\theta}^2 \quad \text{Pues } \dot{\theta}(0) = 0$$

Abuso de notación (en dt) — Abuso de notación (en $\dot{\theta}^2$)

$$\int_0^t 2\dot{\theta}\left(\left(\frac{v_0\sin(\theta_0)}{R}\right)^2 \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} - \frac{g}{R}\sin(\theta)\right) dt =$$

Nótese que $\dot{\theta}\, dt = d\theta$ (Cambio de variables)

$$= 2\left(\left(\frac{v_0\sin(\theta_0)}{R}\right)^2 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)}\, d\theta + \frac{g}{R}\int_{\theta_0}^{\theta} -\sin(\theta)\, d\theta\right)$$

Pues $\theta(0) = \theta_0$ — ídem — Abuso de notación

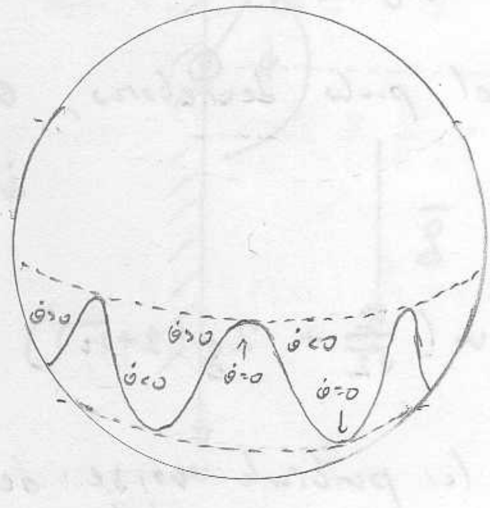
$$= 2\frac{g}{R}\cos(\theta)\Big|_{\theta_0}^{\theta} - \left(\frac{v_0\sin(\theta_0)}{R\sin(\theta)}\right)^2\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$= 2\frac{g}{R}\left(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right) - \left(\frac{v_0}{R}\right)^2\left(\left(\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(\theta)}\right)^2 - 1\right)$$

Finalmente:

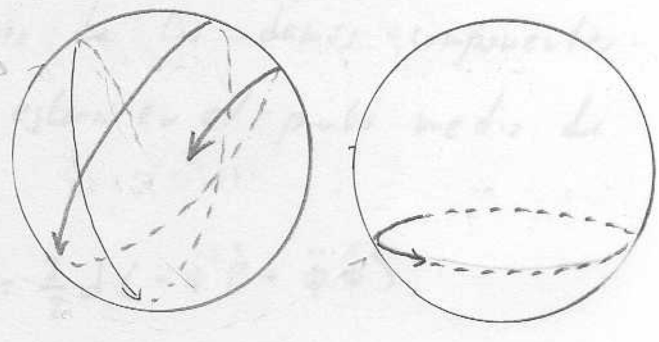
$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2\frac{g}{R}\left(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right) - \left(\frac{v_0}{R}\right)^2\left(\left(\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(\theta)}\right)^2 - 1\right)}$$

El $\pm$ depende de si m va en subida o bajada. La figura ilustra la idea.



Los valores de θ en que se anula $\dot{\theta}$ se llaman <u>puntos de retorno</u>, pues marcan los límites de oscilación.

No es obligatorio que existan: puede que la partícula rote dentro de la cáscara indefinidamente. Incluso podría moverse en M.C.U. con $\dot{\theta}=0$ siempre. Sin contar que además, podría despegarse de la cáscara. Todo depende de las condiciones iniciales



c) Ahora nos dicen que $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$. Nótese que es un punto de retorno, pues $\dot{\theta}(\theta=\theta_0) = \dot{\theta}(t=0) = 0$. Nos piden encontrar v_0 tal que el otro punto de retorno sea $\theta = \frac{2}{3}\pi$.

Entonces, evaluemos $\dot{\theta}^2$ con $\theta_0 = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{2}{3}\pi$ e igualémoslo a cero:

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{v_0}{R}\right)^2\left(\left(\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2 - 1\right)$$

$$= -\frac{g}{R}\left(1+\sqrt{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{v_0}{R}\right)^2$$

Despejamos $|v_d| = \sqrt{3Rg(1+\sqrt{2})}$ //

De la ecuación $(\hat{r})$ despejamos la normal:

$$N = m\left(g\cos(\theta) + R\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)\right)\right)$$

En el punto de retorno, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta} = 0$,

$$\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta) = \left(\frac{v_0}{R}\frac{\sin(\theta_0)}{\sin(\theta)}\right)^2 = 2\frac{g}{R}\left(1+\sqrt{2}\right)$$

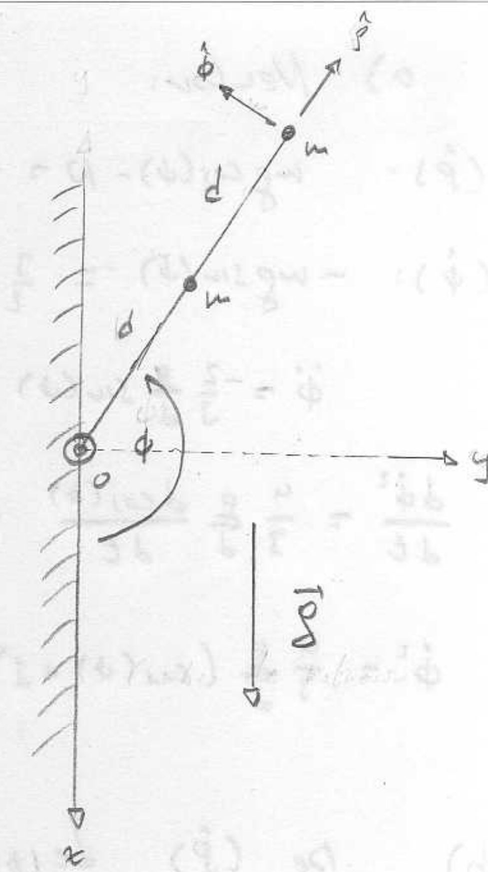
$$N = m\left(\frac{g}{\sqrt{2}} + 2g(1+\sqrt{2})\right) = mg\left(2 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$$

Y la partícula no se despega //

P3/ Usamos un sistema de referencia con centro en la rótula. El eje x apunta hacia abajo y el eje y es horizontal.

En el enunciado nos piden encontrar "la velocidad angular en función del ángulo que la barra forma con la horizontal".

Como no dan más detalles, usaremos coordenadas polares y encontraremos $\dot{\phi}$ en función de ϕ.



Estudiaremos la evolución del centro de masas del sistema. Como las masas de las partículas son iguales y las masas de los demás componentes son despreciables, el centro de masa estará en el punto medio de las partículas:

$$\vec{r}_G = \frac{3}{2} d \hat{\rho} \qquad \vec{v}_G = \frac{3}{2} d \dot{\phi} \hat{\phi} \qquad \vec{a}_G = \frac{3}{2} d \left(-\dot{\phi}^2 \hat{\rho} + \ddot{\phi} \hat{\phi} \right)$$

Como no se nos pide información sobre lo que sucede internamente en el sistema, la Ley de Newton $\vec{F}_{ext} = m_{total} \vec{a}_G$ basta para resolver el problema.

Fuerzas externas:

Gravedad: $m\vec{g} = mg\hat{x} = mg(\cos(\phi)\hat{\rho} - \sin(\phi)\hat{\phi})$

Fuerza de la rótula: $\vec{N} = N\hat{\rho}$

Suponemos que la rótula está perfectamente lubricada

No hay fuerza en $\hat{\phi}$ (roce)

a) Newton:

Condiciones iniciales:

$\phi(0) = \pi$

$\dot\phi(0) \approx 0$

Si fuera igual a cero el péndulo no baja

$(\hat\rho)$: $mg\cos(\phi) - N = -\frac{3}{2} d m \dot\phi^2$

$(\hat\phi)$: $-mg\sin(\phi) = \frac{3}{2} d m \ddot\phi$

$$\ddot\phi = -\frac{2}{3}\frac{g}{d}\sin(\phi) \iff 2\dot\phi\ddot\phi = -\frac{4}{3}\frac{g}{d}\dot\phi\sin(\phi) \iff$$

$$\frac{d\dot\phi^2}{dt} = \frac{4}{3}\frac{g}{d}\frac{d\cos(\phi)}{dt} \iff \dot\phi^2 - 0 = \frac{4}{3}\frac{g}{d}(\cos(\phi) - \cos(\pi))$$

$$\dot\phi^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{d}(\cos(\phi)+1) \iff \dot\phi = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{d}(\cos(\phi)+1)} \quad //$$

b) De $(\hat\rho)$ despejamos N:

$$N = m\left(g\cos(\phi) + \frac{3}{2} d\dot\phi^2\right) = mg(3\cos(\phi)+2)$$

Para $\phi = \frac{\pi}{2}$; $\cos(\phi) = 0$, $N = 2mg$ //