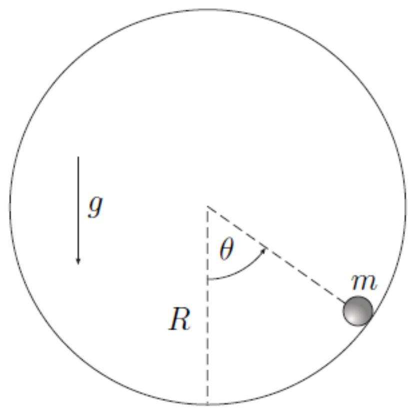
Clase Auxiliar FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Auxiliar: Francisco Sepúlveda

27/Agosto/2010

P1.



a) Usando la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

en polares:

$$-N\hat{\rho} + mg\cos\theta\hat{\rho} - mg\sin\theta\hat{\theta} = m\{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}\}$$

usando que $\rho = R = cte \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, y separando la ecuacion vectorial en ecuaciones escalares se obtiene:

$$\hat{\rho}) - N + mg\cos\theta = -mR\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta}) - mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}$$

b) tomando la segunda ecuación, se aprecia que es de variables separables si primero se usa regla de la cadena

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$$

se desta forma, la ecuación diferencial queda de la forma

$$R\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -g\sin\theta$$

integrando en la variable θ

$$R\int_{\dot{\theta}_0=\omega_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = -g\int_{\theta_0=0}^{\theta} \sin\theta d\theta$$

$$R\frac{\dot{\theta}^2}{2}|_{\omega_0}^{\dot{\theta}} = g\cos\theta|_0^\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2$$

dado que $\dot{\theta}^2$ es una cantidad posítiva o cero, se tiene que

$$2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2 \geq 0$$

$$\cos\theta \geq 1 - \frac{\omega_0^2 R}{2g}$$

si la desigualdad se tranformara en igualdad, se tendría que $\dot{\theta}^2 = 0$, lo que significa que hasta cierto ángulo la partícula llegará, y ese ángulo está determinado por

$$\cos\theta = 1 - \frac{\omega_0^2 R}{2g}$$

c) de a) y b) se tiene que

$$-N + mg\cos\theta = -mR\{2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2\}$$

y de aquí despejando se tiene que

$$N = mg\cos\theta + mR\{2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \omega_0^2\}$$

$$N = 3mg\cos\theta - 2mg + mR\omega_0^2$$

imponiendo que siempre exista la normal, i.e., $N \geq 0$

$$3mg\cos\theta - 2mg + mR\omega_0^2 \geq 0$$

$$\cos\theta \geq \frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g}$$

si la igualdad se convierte en igualdad, se tiene que $N = 0$, lo que significa físicamente que la partícula se levanta de la superficie para un ángulo determinado, y ese ángulo se determina resolviendo

$$\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g}$$

d) igualando los resultados de c) y b)

$$\frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g} = 1 - \frac{\omega_0^2 R}{2g}$$

$$\frac{1}{6}\frac{R\omega_0^2}{g} = \frac{1}{3} \Rightarrow \omega_0^2 = 2\frac{g}{R}$$

e) para que oscile sin que la partícula se levante, se debe tener que

$$\theta_{stop} \leq \theta_{take.off}$$

y recordando que la función coseno es decreciente

$$\cos\theta_{stop} \geq \cos\theta_{take.off}$$

$$1 - \frac{\omega_0^2 R}{2g} \geq \frac{2}{3} - \frac{R\omega_0^2}{3g}$$

$$\omega_0^2 \leq 2\frac{g}{R}$$

que es la condición necesaria para que ocurra lo pedido

f) para que gire en un solo sentido, la normal debe ser mayor que cero en el caso crítico, que es cuando $\theta = \pi$

$$N(\pi) \geq 0$$

Se obtiene que

$$\omega_0^2 \geq 5\frac{g}{R}$$